

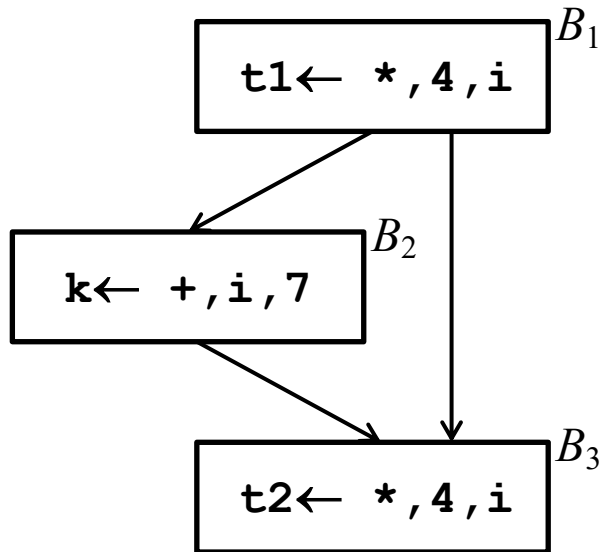
# **3. Анализ потока данных**

## 3.1 Доступные выражения

### 3.1.1 Определение

◇ Выражение  $e$  *доступно* в точке  $p$ , если  $e$  вычисляется на любом пути от  $Entry$  до  $p$  причем переменные, входящие в состав  $e$  не переопределяются между последним таким вычислением и точкой  $p$ .

◇ **Пример.** Пусть точка  $p$  – вход в блок  $B_3$ .



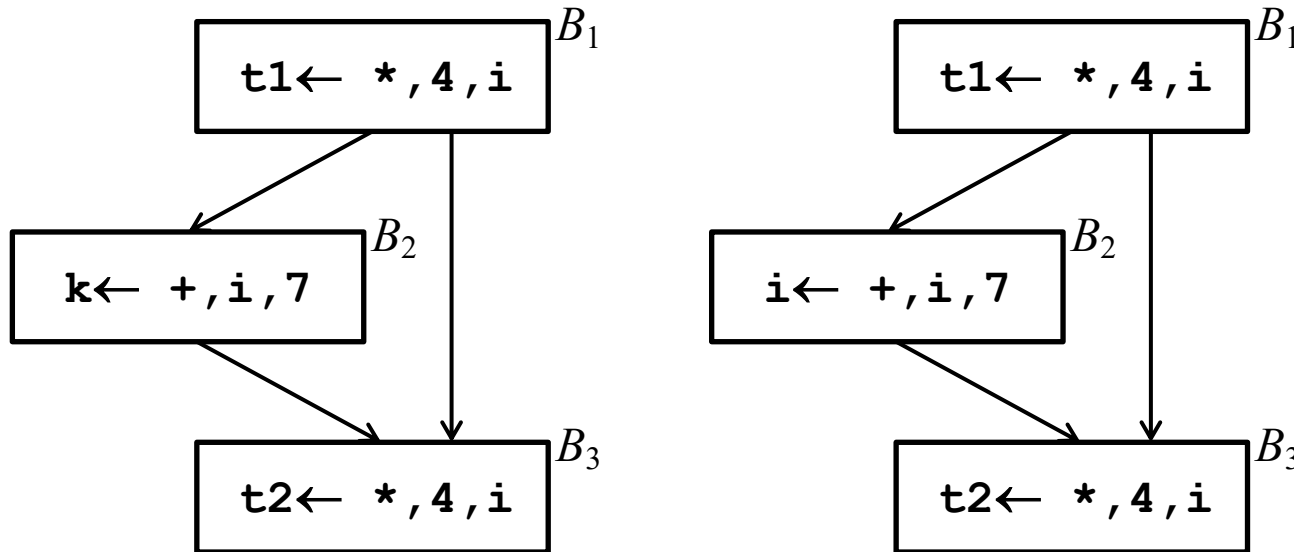
На рисунке присваивание *не убивает* выражение  $*, 4, i$ . Поэтому  $t2 \leftarrow *, 4, i$  можно заменить на  $t2 \leftarrow t1$

# 3.1 Доступные выражения

## 3.1.1 Определение

◇ Выражение  $e$  *доступно* в точке  $p$ , если  $e$  вычисляется на любом пути от  $Entry$  до  $p$  причем переменные, входящие в состав  $e$  не переопределяются между последним таким вычислением и точкой  $p$ .

◇ **Пример.** Пусть точка  $p$  – вход в блок  $B_3$ .



На рисунке присваивание *не убивает* выражение  $*, 4, i$ . Поэтому  $t2 \leftarrow *, 4, i$  можно заменить на  $t2 \leftarrow t1$

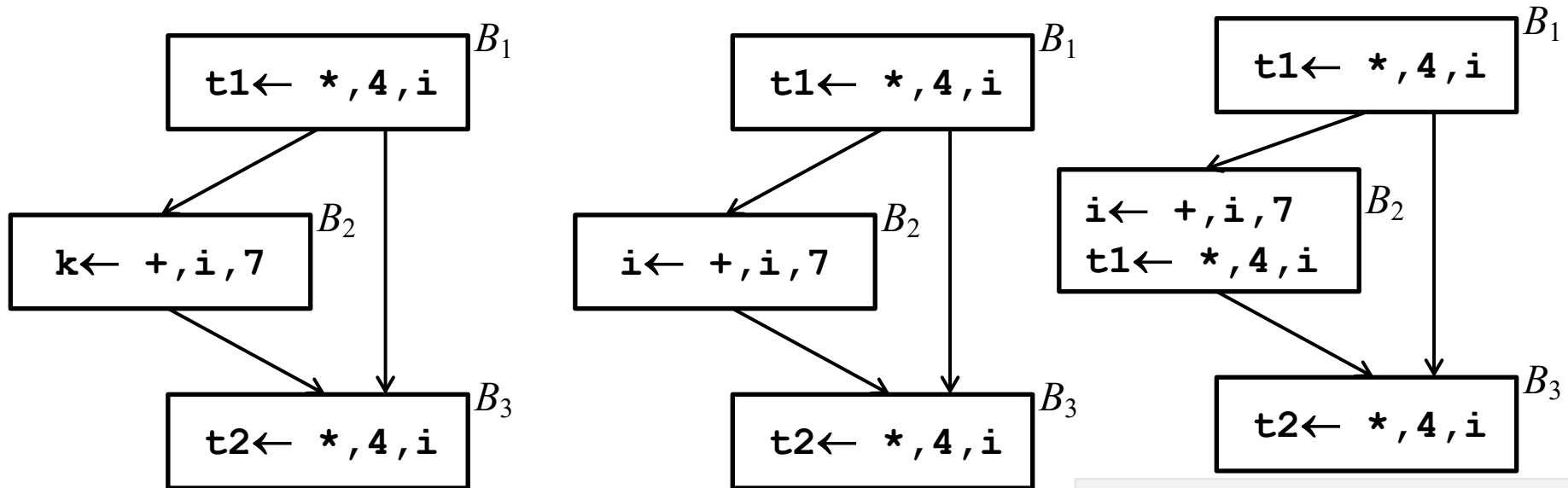
Присваивание *убивает* выражение  $*, 4, i$ . Замена  $t2 \leftarrow *, 4, i$  на  $t2 \leftarrow t1$  будет некорректной.

# 3.1 Доступные выражения

## 3.1.1 Определение

◇ Выражение  $e$  *доступно* в точке  $p$ , если  $e$  вычисляется на любом пути от  $Entry$  до  $p$  причем переменные, входящие в состав  $e$  не переопределяются между последним таким вычислением и точкой  $p$ .

◇ **Пример.** Пусть точка  $p$  – вход в блок  $B_3$ .



Присваивание *не убивает* выражение  $*, 4, i$ .  
Замена  $t2 \leftarrow *, 4, i$  на  $t2 \leftarrow t1$  корректна.

Присваивание *убивает* выражение  $*, 4, i$ .  
Замена  $t2 \leftarrow *, 4, i$  на  $t2 \leftarrow t1$  некорректна.

Перевычисление в  $B_2$  выражения  $*, 4, i$  обеспечивает корректность замены  $t2 \leftarrow *, 4, i$  на  $t2 \leftarrow t1$

## 3.1 Доступные выражения

### 3.1.1 Определение

- ◇ Для каждого базового блока  $B$  определим
  - ◇ множество  $e\_kill_B$  выражений, *убиваемых* в блоке  $B$   
(пример – присваивание  $i \leftarrow +, i, 7$  в блоке  $B_2$  *убивает* выражение  $*, 4, i$ )
  - ◇ множество  $e\_gen_B$  выражений, *порождаемых* в блоке  $B$   
(пример – присваивание  $t1 \leftarrow *, 4, i$  в блоке  $B_2$  *порождает* выражение  $*, 4, i$ ).

## 3.1 Доступные выражения

### 3.1.2 Уравнения потока данных

◇ Для того, чтобы найти доступные выражения, можно использовать метод, напоминающий метод вычисления достигающих определений.

◇  $U$  – множество всех выражений программы.

◇  $In[B]$  – множество выражений из  $U$ , доступных на входе в  $B$ ,

◇ Граничное условие:

$$In[Entry] = \emptyset$$

◇ Система уравнений:

$$Out[B] = e\_gen_B \cup (In[B] - e\_kill_B)$$

$$In[B] = \bigcap_{P \in Pred(B)} Out[P]$$

$$In[B_i] = \bigcap_{P \in Pred(B_i)} (e\_gen_P \cup (In[P] - e\_kill_P))$$

## 3.1 Доступные выражения

### 3.1.3 Итеративный алгоритм вычисления доступных выражений

- ◇ **Вход:** граф потока, в котором для каждого блока  $B$  вычислены множества  $e\_gen_B$  и  $e\_kill_B$
- ◇ **Выход:** множества выражений, доступных на входе ( $In[B]$ ) каждого базового блока  $B$  графа потока.
- ◇ **Метод:** выполнить следующую программу

$In[Entry] = \emptyset;$

**for** (каждый базовый блок  $B$ , отличный от  $Entry$ )  $In[B] = U;$

**while** (внесены изменения в  $Out$ ) {

**for** (каждый базовый блок  $B$ , отличный от  $Entry$ ) {

$$In[B] = \bigcap_{P \in Pred(B)} (e\_gen_B \cup (In[P] - e\_kill_B))$$

    }

}

## 3.1 Доступные выражения

### 3.1.3 Итеративный алгоритм вычисления доступных выражений

◇ **Метод:** выполнить следующую программу

```
In[Entry] = ∅;
```

```
WorkList = ∅;
```

```
for (каждый базовый блок B, отличный от Entry) {  
  поместить B в WorkList;
```

```
  In[B] = U; /* Каждому In[B] присваивается значение  
             его нулевой итерации */
```

```
};
```

```
do { /* основной цикл*/
```

```
  Выбрать из очереди WorkList очередной блок B
```

```
  Вычислить InNew[B], используя уравнение
```

$$InNew[B] = \bigcap_{P \in Pred(B)} (e\_gen_B \cup (In[B] - e\_kill_B))$$

```
  if (InNew[B] ≠ In[B]) {
```

```
    In[B] = InNew[B];
```

```
    Поместить потомков B в конец очереди WorkList
```

```
  }
```

```
} while |WorkList|>0;
```



## 3.2 Полурешетки

### 3.2.1 Анализ потока данных

- ◇ При анализе потока данных рассматриваются множества переменных для описания состояния и такие операции как *объединение* ( $\cup$ ) и *пересечение* ( $\cap$ ) множеств.

## 3.2 Полурешетки

### 3.2.1 Анализ потока данных

- ◇ При анализе потока данных рассматриваются множества переменных для описания состояния и такие операции как *объединение* ( $\cup$ ) и *пересечение* ( $\cap$ ) множеств.
- ◇ Свойства операций  $\cup$  и  $\cap$ :

$$A \cup A = A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$\text{Если } A \cup B = A, \text{ то } B \subseteq A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$\text{Если } A \cap B = A, \text{ то } B \supseteq A$$

(идемпотентность)

(коммутативность)

(ассоциативность)

отношение частичного  
порядка, связанное с  
операцией

## 3.2 Полурешетки

### 3.2.1 Анализ потока данных

◇ При анализе потока данных рассматриваются множества переменных для описания состояния и такие операции как *объединение* ( $\cup$ ) и *пересечение* ( $\cap$ ) множеств.

◇ Свойства операций  $\cup$  и  $\cap$ :

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	(идемпотентность)
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	(коммутативность)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$	(ассоциативность)
Если $A \cup B = A$ , то $B \subseteq A$	Если $A \cap B = A$ , то $B \supseteq A$	отношение частичного порядка, связанное с операцией

◇ Если множество  $U$  содержит все элементы, то любое множество  $A \subseteq U$  и  $A \cup U = U \cup A = U$

◇ Для пересечения ( $\cap$ ) роль  $U$  играет  $\emptyset$ : любое множество  $A \supseteq \emptyset$  и  $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$

## 3.2 Полурешетки

### 3.2.2 Определение полурешетки

- ◇ Полурешетка – это абстрактная алгебраическая структура, над элементами которой определена абстрактная операция  $\wedge$  (мы будем называть ее «сбор»), обладающая свойствами операций  $\cup$  и  $\cap$ .
- ◇ **Определение.** Полурешетка представляет собой множество  $L$ , на котором определена бинарная операция «сбор»  $\wedge$ , такая, что для всех  $x, y$  и  $z \in L$ :

$$x \wedge x = x \quad (\text{идемпотентность})$$

$$x \wedge y = y \wedge x \quad (\text{коммутативность})$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \quad (\text{ассоциативность})$$

Полурешетка имеет *верхний элемент* (или *верх*)  $\top \in L$  такой, что для всех  $x \in L$  выполняется  $\top \wedge x = x$

Полурешетка может иметь (но необязательно) *нижний элемент* (или *низ*)  $\perp \in L$ :  $\forall x \in L \quad \perp \wedge x = \perp$

## 3.2 Полурешетки

### 3.2.3 Полурешеточное отношение частичного порядка $\leq$

- ◇ Для всех пар  $x, y \in L$  определим отношение  $\leq$ :  
 $x \leq y$  тогда и только тогда, когда  $x \wedge y = x$

$$x \cap y = x \Rightarrow x \subseteq y$$

$$x \cup y = x \Rightarrow y \subseteq x$$

Т.е. отношение  $\leq$  имеет противоположный смысл для  $\cap$  и  $\cup$ , являясь обобщением  $\subseteq$  или  $\supseteq$  для данной задачи анализа потока данных.

## 3.2 Полурешетки

### 3.2.3 Полурешеточное отношение частичного порядка $\leq$

- ◇ Для всех пар  $x, y \in L$  определим отношение  $\leq$ :  
 $x \leq y$  тогда и только тогда, когда  $x \wedge y = x$
- ◇ Отношение  $\leq$  является **отношением частичного порядка**.
  - (1) *Рефлексивность*  $\leq$  следует из идемпотентности  $\wedge$ :  
$$x \leq x \Leftrightarrow x \wedge x = x$$
  - (2) *Антисимметричность*  $\leq$  следует из коммутативности  $\wedge$ :  
пусть  $x \leq y$  и  $y \leq x$ ; тогда по определению операции  $\leq$ :  
$$x = x \wedge y = y \wedge x = y$$
  - (3) *Транзитивность*  $\leq$  следует из ассоциативности  $\wedge$ :  
пусть  $x \leq y$  и  $y \leq z$ ; тогда по определению  $\leq$   
$$x \wedge y = x \text{ и } y \wedge z = y;$$
$$(x \wedge z) = ((x \wedge y) \wedge z) = (x \wedge (y \wedge z)) = (x \wedge y) = x,$$
$$(x \wedge z) = x \Leftrightarrow x \leq z.$$

## 3.2 Полурешетки

### 3.2.4 Наибольшая нижняя граница

◇ **Определение.** Пусть  $\langle L, \leq \rangle$  – частично упорядоченное множество (в частности, полурешетка).

*Наибольшей нижней границей*  $\inf(x, y)$  элементов  $x$  и  $y \in L$  называется элемент  $g \in L$ , такой, что  $g \leq x$ ;  $g \leq y$ ; и если  $z \in L$ , такой, что  $z \leq x$  и  $z \leq y$ , то  $z \leq g$ .

◇ **Утверждение.** Если  $x$  и  $y \in L$ , где  $\langle L, \wedge \rangle$  – полурешетка, то  $\inf(x, y) = x \wedge y$ .

**Доказательство.** Пусть  $g = x \wedge y$ . Тогда

$$g \wedge x = ((x \wedge y) \wedge x) = (x \wedge (y \wedge x)) = (x \wedge (x \wedge y)) = \\ = ((x \wedge x) \wedge y) = (x \wedge y) = g, \text{ откуда следует } g \leq x.$$

Точно таким же образом доказывается, что  $g \leq y$ .

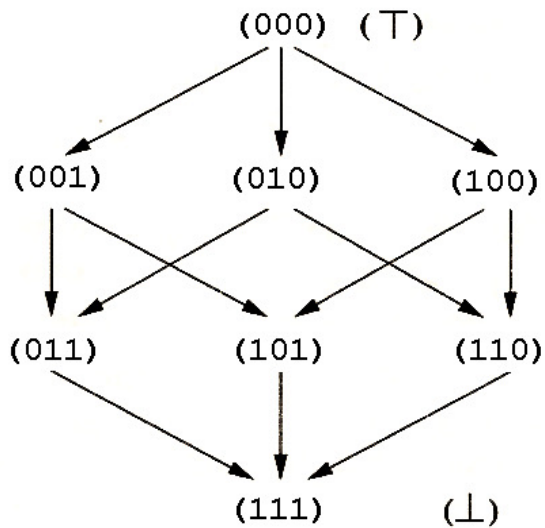
Пусть  $z \in L$ ,  $z \leq x$  и  $z \leq y$ . Докажем, что  $z \leq g$ . Имеем:

$$(z \wedge g) = (z \wedge (x \wedge y)) = ((z \wedge x) \wedge y); z \leq x \Rightarrow (z \wedge x) = z \\ \Rightarrow (z \wedge g) = (z \wedge y) = z. \Rightarrow (z \wedge g) = z \Rightarrow z \leq g.$$

## 3.2 Полурешетки

### 3.2.5. Диаграммы полурешеток

- ◇ *Диаграмма полурешетки*  $\langle L, \wedge \rangle$  представляет собой граф, узлами которого являются элементы  $L$ , а ребра направлены от  $x$  к  $y$ , если  $y \leq x$ .
- ◇ **Пример.** На рисунке – диаграмма полурешетки  $\langle U, \cup \rangle$ ,  $|U| = 8$ : элемент множества  $U$  представляется битовым 3-вектором.



(по определению  $\leq$  :

$$x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x)$$

В частности, если сбор – это объединение:

$$x \cup y = x \Rightarrow x \supseteq y$$

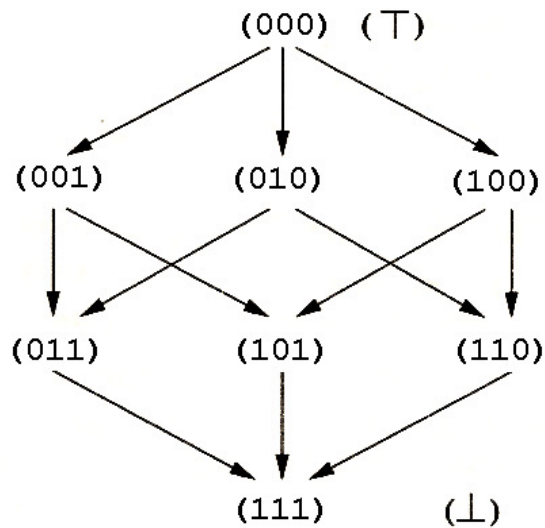
т. е. дуги направлены от *большого* к *меньшему* в смысле «полурешеточного» отношения, а в «обычном» смысле получается наоборот (но так будет только для  $\cup$ ).



## 3.2 Полурешетки

### 3.2.5. Диаграммы полурешеток

- ◇ *Диаграмма полурешетки*  $\langle L, \wedge \rangle$  представляет собой граф, узлами которого являются элементы  $L$ , а ребра направлены от  $x$  к  $y$ , если  $y \leq x$ .
- ◇ **Пример.** На рисунке – диаграмма полурешетки  $\langle U, \cup \rangle$ ,  $|U| = 8$ : элемент множества  $U$  представляется битовым 3-вектором.



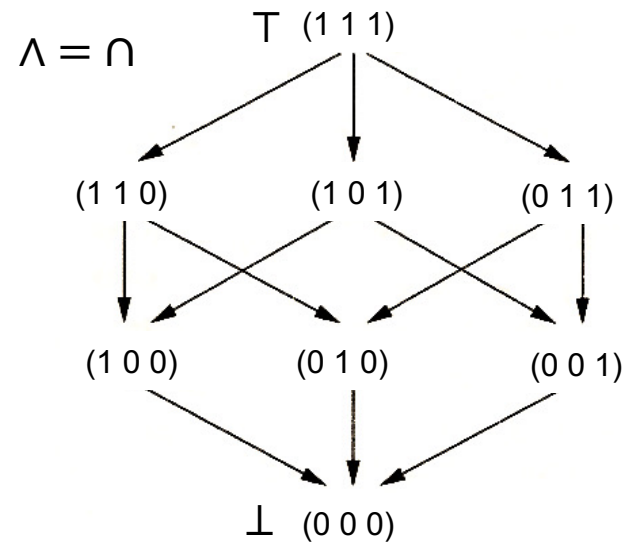
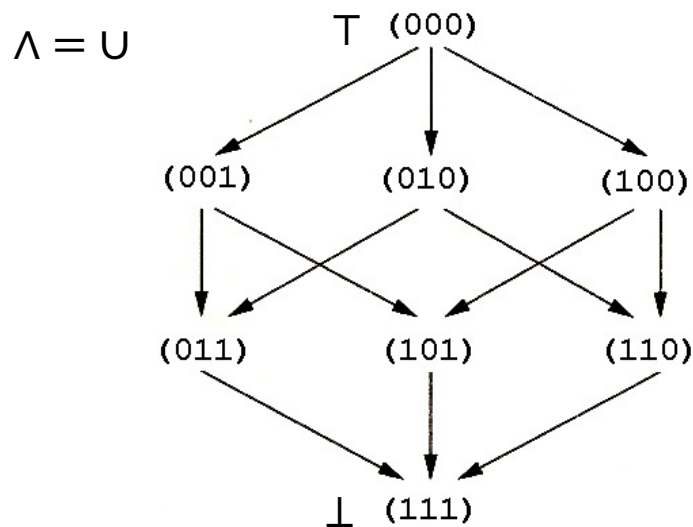
- ◇ **Замечание.** Определение элемента  $\perp$  внизу диаграммы: для любого  $x \in L$ :  $\perp \wedge x = \perp$   
Этот элемент называется «низом», так как по определению отношения  $\leq$  для любого  $x \in L$   $\perp \leq x$ .  
Полурешетка с операцией  $\wedge$  не обязательно содержит  $\perp$ .

## 3.2 Полурешетки

### 3.2.5.1. Примеры полурешеток

◇ *Достигающие определения и живые переменные:*  
 $\Lambda = \cup$  (сбор – объединение),  $\perp = (1\ 1\ 1)$ ,  $\top = (0\ 0\ 0)$

◇ *Доступные выражения:*  
 $\Lambda = \cap$  (сбор – пересечение),  $\perp = (0\ 0\ 0)$ ,  $\top = (1\ 1\ 1)$



« $\perp$ » соответствует консервативному решению, при котором оптимизацию делать нельзя (все определения достигают точки, все переменные живы, ни одно выражение не доступно)

## 3.2 Полурешетки

### 3.2.6 Наименьшая верхняя граница

- ◇ В частично упорядоченном множестве  $\langle L, \leq \rangle$  можно по аналогии с  $\inf(x, y)$  определить наименьшую верхнюю границу  $\sup(x, y)$  как такой  $b \in L$ , что  $x \leq b, y \leq b$ , и если для  $z \in L$   $x \leq z$  и  $y \leq z$ , то  $b \leq z$ .
- ◇ В полурешетке  $\langle L, \wedge \rangle$   $\inf(x, y)$  существует для любой пары элементов  $x$  и  $y \in L$ , а  $\sup(x, y)$  нет.
- ◇ В частично упорядоченном множестве  $\langle L, \leq \rangle$ , в котором для любых  $x$  и  $y \in L$  существует  $\sup(x, y)$ , можно определить бинарную операцию  $\vee$  (объединение)  $x \vee y = \sup(x, y)$ .
- ◇ Множество, в котором определены обе операции –  $\wedge$  (сбор) и  $\vee$  (объединение), – называется *решеткой*.

## 3.3 Структура потока данных

### 3.3.1 Определение

◇ **Определение.** Структурой потока данных называется четверка

$$\langle D, F, L, \wedge \rangle ,$$

где

- ◇  $D$  – направление анализа (*Forward* или *Backward*),
- ◇  $F$  – семейство передаточных функций,
- ◇  $L$  – поток данных (множество элементов полурешетки),
- ◇  $\wedge$  - реализация операции сбора.

◇ **Примеры.**

- 1 Структура потока данных для анализа **достигающих определений**:  $\langle \textit{Forward}, \mathcal{GK}, \textit{Def}, \cup \rangle$ ,

где  $\mathcal{GK}$  – семейство передаточных функций вида *gen-kill*,  
 $\textit{Def}$  – множество определений переменных.

## 3.3 Структура потока данных

### 3.3.1 Определение

◇ Примеры.

2 Структура потока данных для анализа **живых переменных**:

*⟨Backward,  $\mathcal{LV}$ , Var,  $\cup$ ⟩*,

где  $\mathcal{LV}$  – семейство передаточных функций вида,

$$f(x) = use \cup (x - def)$$

*Def* – множество определений переменных.

3 Структура потока данных для анализа **доступных выражений**:

*⟨Forward,  $\mathcal{AE}$ , Expr,  $\cap$ ⟩*,

где  $\mathcal{AE}$  – семейство передаточных функций вида

$$f(x) = e\_gen \cup (x - e\_kill),$$

*Expr* – множество выражений программы.

## 3.3 Структура потока данных

### 3.3.2 Замкнутость

- ◇ **Определение.** Семейство передаточных функций  $F$  называется *замкнутым*, если:
  - ◇  $F$  содержит тождественную функцию  $I: \forall x \in L: I(x) = x$ .
  - ◇  $F$  замкнуто относительно композиции:  
$$\forall f, g \in F \Rightarrow h(x) = g(f(x)) \in F.$$
  
- ◇ **Утверждение 1.** Семейство передаточных функций  $F$ , используемое при анализе достигающих определений (передаточные функции вида *gen-kill*), является замкнутым.

## 3.3 Структура потока данных

### 3.3.2 Замкнутость

◇ **Утверждение 1.** Семейство передаточных функций  $F$ , используемое при анализе достигающих определений (передаточные функции вида *gen-kill*), является замкнутым.

1) Замкнутость относительно композиции уже установлена.

2) Тожественная функция  $I(x) = x$  является функцией вида *gen-kill* с  $gen = kill = \emptyset$ .

## 3.3 Структура потока данных

### 3.3.2 Замкнутость

- ◇ **Утверждение 1.** Семейство передаточных функций  $F$ , используемое при анализе достигающих определений (передаточные функции вида *gen-kill*), является замкнутым.
  - 1) Замкнутость относительно композиции уже установлена.
  - 2) Тожественная функция  $I(x) = x$  является функцией вида *gen-kill* с  $gen = kill = \emptyset$ .
- ◇ **Утверждение 2.** Семейство передаточных функций, используемое при анализе живых переменных является замкнутым.
- ◇ **Утверждение 3.** Семейство передаточных функций, используемое при анализе доступных выражений является замкнутым.



## 3.3 Структура потока данных

### 3.3.3 Монотонные структуры

- ◇ **Определение 1.** Структура потока данных  $\langle D, F, L, \wedge \rangle$  называется *монотонной*, если  $\forall x, y \in L, \forall f \in F (x \leq y) \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ .
- ◇ **Определение 2.** Структура потока данных  $\langle D, F, L, \wedge \rangle$  называется *монотонной*, если  $\forall x, y \in L, \forall f \in F f(x \wedge y) \leq f(x) \wedge f(y)$ .

## 3.3 Структура потока данных

### 3.3.3 Монотонные структуры

- ◇ **Определение 1.** Структура потока данных  $\langle D, F, L, \wedge \rangle$  называется *монотонной*, если  $\forall x, y \in L, \forall f \in F (x \leq y) \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ .
- ◇ **Определение 2.** Структура потока данных  $\langle D, F, L, \wedge \rangle$  называется *монотонной*, если  $\forall x, y \in L, \forall f \in F f(x \wedge y) \leq f(x) \wedge f(y)$ .
- ◇ **Утверждение.** Определения 3.3.3.1 и 3.3.3.2 эквивалентны.

## 3.3 Структура потока данных

### 3.3.3 Монотонные структуры

- ◇ **Определение 1.** Структура потока данных  $\langle D, F, L, \wedge \rangle$  называется *монотонной*, если  $\forall x, y \in L, \forall f \in F x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ .
- ◇ **Определение 2.** Структура потока данных  $\langle D, F, L, \wedge \rangle$  называется *монотонной*, если  $\forall x, y \in L, \forall f \in F f(x \wedge y) \leq f(x) \wedge f(y)$ .
- ◇ **Утверждение.** Определения 3.2.3.1 и 3.2.3.2 эквивалентны.
  - ◇ Из определения 1 следует определение 2:  
$$x \wedge y = \inf(x, y) \Rightarrow x \wedge y \leq x \text{ и } x \wedge y \leq y \Rightarrow (1) \Rightarrow$$
$$f(x \wedge y) \leq f(x) \text{ и } f(x \wedge y) \leq f(y) \Rightarrow$$
$$f(x \wedge y) = \inf(f(x), f(y)) = f(x) \wedge f(y)$$
  - ◇ Из определения 2 следует определение 1:  
$$x \leq y \Rightarrow x \wedge y = x \Rightarrow_{(\text{опр2})} f(x) \leq f(x) \wedge f(y),$$
$$f(x) \wedge f(y) = \inf(f(x), f(y)) \leq f(y); \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

## 3.3 Структура потока данных

### 3.3.4 Дистрибутивные структуры

◇ **Определение.** Структура потока данных  $\langle D, F, L, \wedge \rangle$  называется *дистрибутивной*, если

$$\forall x, y \in L, \forall f \in F: f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

## 3.3 Структура потока данных

### 3.3.4 Дистрибутивные структуры

◇ **Определение.** Структура потока данных  $\langle D, F, L, \wedge \rangle$  называется *дистрибутивной*, если

$$\forall x, y \in L, \forall f \in F: f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

◇ **Утверждение.** Если структура потока данных  $\langle D, F, L, \wedge \rangle$  дистрибутивна, то она монотонна.

$$a = b \Rightarrow_{\text{идемпотентность}} a \wedge b = a \Rightarrow a \leq b$$

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \Rightarrow f(x \wedge y) \leq f(x) \wedge f(y)$$

◇ Обратное утверждение неверно.

В качестве доказательства можно привести пример монотонной структуры потока данных, которая не дистрибутивна.

## 3.3 Структура потока данных

### 3.3.5. Дистрибутивность структуры достигающих определений

◇ **Утверждение.** Структура достигающих определений  $RD = \langle Forward, Gen-kill, \emptyset, \cup \rangle$  дистрибутивна

◇  $y, z \in RD, f(x) = G \cup (x - K) \in Gen-kill.$

Докажем, что

$$G \cup ((y \cup z) - K) = (G \cup (y - K)) \cup (G \cup (z - K))$$

(1)  $y, z \in G$ : равенство выполняется, так как  $G$  входит  
и в левую, и в правую его части.

(2)  $y, z \notin G$ :  $G$  можно исключить из равенства:

$$(y \cup z) - K = (y - K) \cup (z - K)$$

Это равенство проверяется при помощи диаграмм Венна.

## 3.3 Структура потока данных

### 3.3.5. Дистрибутивность структуры достигающих определений

◇ **Утверждение.** Структура достигающих определений  $RD = \langle Forward, Gen-kill, \emptyset, \cup \rangle$  дистрибутивна

◇  $y, z \in RD, f(x) = G \cup (x - K) \in Gen-kill.$

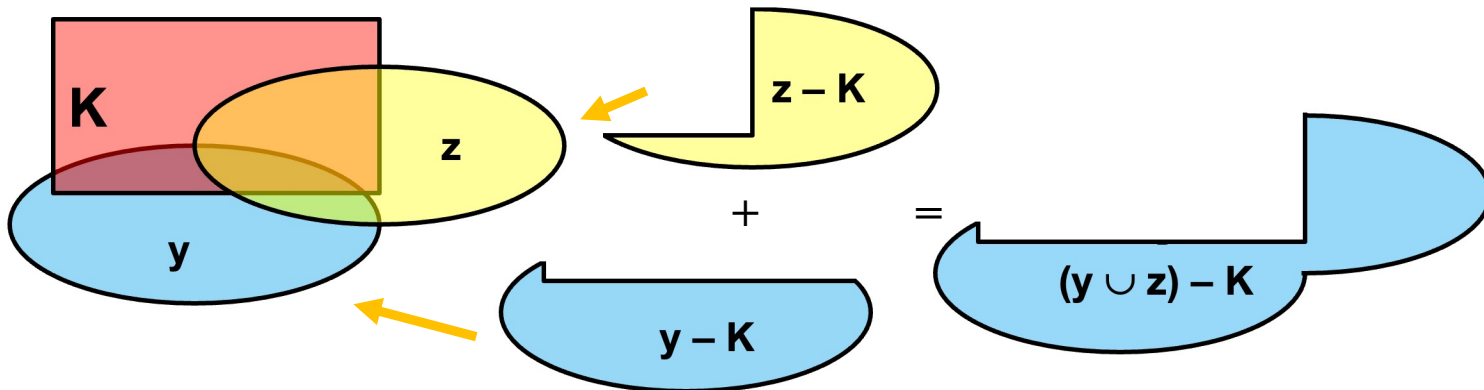
Докажем, что

$$G \cup ((y \cup z) - K) = (G \cup (y - K)) \cup (G \cup (z - K))$$

(2)  $y, z \notin G$ :  $G$  можно исключить из равенства:

$$(y \cup z) - K = (y - K) \cup (z - K)$$

Это равенство проверяется при помощи диаграмм Венна.



## 3.3 Структура потока данных

### 3.3.6. Дистрибутивность структур живых переменных и доступных выражений

- ◇ **Следствие 1.** Структура живых переменных

$$LV = \langle \textit{Backward}, \textit{Def-use}, \emptyset, \cup \rangle$$

дистрибутивна

- ◇  $f(x) \in \textit{Def-use}$  алгебраически подобна функции класса *Gen-kill*.

- ◇ **Следствие 2.** Структура доступных выражений

$$AE = \langle \textit{Forward}, \textit{Gen-kill}, U, \cap \rangle$$

дистрибутивна



## 3.4 Обобщенный итеративный алгоритм

### 3.4.1 Описание алгоритма

- ◇ **Алгоритм.** Итеративное решение задачи анализа потока данных
  - ◇ **Вход:** граф потока управления,  
структура потока данных  $\langle D, F, L, \wedge \rangle$ ,  
передаточная функция  $f_B \in F$   
константа из  $l \in L$  для граничного условия
  - ◇ **Выход:** значения из  $L$  для  $In[B]$  и  $Out[B]$  для каждого блока  $B$  в графе потока.
  - ◇ **Метод:** если  $D = Forward$  выполнить программу (3.4.2);  
если  $D = Backward$  выполнить программу (3.4.3).

## 3.4 Обобщенный итеративный алгоритм

### 3.4.2 Решение задачи потока данных ( $D = Forward$ )

$Out[Entry] = l;$

**for** (*each*  $B \neq Entry$ )  $Out[B] = T;$

**while** (внесены изменения в  $Out$ )

**for** (*each*  $B \neq Entry$ ) {

$$In[B] = \bigwedge_{P \in Pred(B)} Out[P]$$

$$Out[B] = f_B(In[B])$$

}

## 3.4 Обобщенный итеративный алгоритм

### 3.4.3 Решение задачи потока данных ( $D = Backward$ )

$In[Exit] = l;$

**for** (*each*  $B \neq Exit$ )  $In[B] = \top;$

**while** (внесены изменения в  $In$ )

**for** (*each*  $B \neq Exit$ ) {

$$Out[B] = \bigwedge_{S \in Succ(B)} In[S]$$

$$In[B] = f_B(Out[B])$$

}

## 3.5 Свойства итеративного алгоритма

### 3.5.1 Сходимость к решению

◇ **Утверждение.** Если обобщенный итеративный алгоритм сходится, то получающийся результат является решением уравнений потоков данных.

◇  $D = Forward:$

Если после очередной итерации цикла **while** хотя бы для одного  $B$  уравнение  $Out[B] = f_B(In[B])$  не удовлетворяется, то для этого  $B$

$$OutNew[B] \neq Out[B].$$

Следовательно, в множество  $Out[B]$  будет внесено изменение и *change* не позволит выйти из цикла.

## 3.5 Свойства итеративного алгоритма

### 3.5.1 Сходимость к решению

◇ **Утверждение.** Если обобщенный итеративный алгоритм сходится, то получающийся результат является решением уравнений потоков данных.

◇  $D = \textit{Backward}$ :

Аналогичные рассуждения, только вместо множества  $\textit{Out}[B]$  рассматривается множество  $\textit{In}[B]$ .

## 3.5 Свойства итеративного алгоритма

### 3.5.2 Максимальная фиксированная точка

◇ **Определение.** *Максимальная фиксированная точка* системы уравнений

$$In[B] = \bigwedge_{P \in Pred(B)} Out[P]$$

$$Out[B] = f_B(In[B])$$

представляет собой решение  $\{In[B_i]^{max}, Out[B_i]^{max}\}$  этой системы, обладающее тем свойством, что для любого другого решения  $\{In[B_i], Out[B_i]\}$  выполняются условия

$$In[B_i] \leq In[B_i]^{max} \text{ и } Out[B_i] \leq Out[B_i]^{max}$$

где  $\leq$  – полурешеточное отношение частичного порядка.

## 3.5 Свойства итеративного алгоритма

### 3.5.3 Монотонность итераций

- ◇ **Утверждение 1.** Пусть  $In[B]^i$  и  $Out[B]^i$  – значения  $In[B]$  и  $Out[B]$  после  $i$ -ой итерации. Если структура потока данных монотонна, то

$$In[B]^{i+1} \leq In[B]^i \text{ и } Out[B]^{i+1} \leq Out[B]^i$$

- ◇ Индукция по  $i$ .

## 3.5 Свойства итеративного алгоритма

### 3.5.3 Монотонность итераций

- ◇ **Утверждение 1.** Пусть  $In[B]^i$  и  $Out[B]^i$  – значения  $In[B]$  и  $Out[B]$  после  $i$ -ой итерации. Если структура потока данных монотонна, то

$$In[B]^{i+1} \leq In[B]^i \text{ и } Out[B]^{i+1} \leq Out[B]^i$$

- ◇ Индукция по  $i$ .

- ◇ **Основание:**

$$In[B]^1 \leq In[B]^0 \quad \text{и}$$

$$Out[B]^1 \leq Out[B]^0,$$

так как  $\forall B \neq Entry: In[B]^0 = \top$  и  $Out[B]^0 = \top$ .



## 3.5 Свойства итеративного алгоритма

### 3.5.3 Монотонность итераций

- ◇ **Утверждение 1.** Пусть  $In[B]^i$  и  $Out[B]^i$  – значения  $In[B]$  и  $Out[B]$  после  $i$ -ой итерации. Если структура потока данных монотонна, то
$$In[B]^{i+1} \leq In[B]^i \text{ и } Out[B]^{i+1} \leq Out[B]^i$$
- ◇ Индукция по  $i$ .
- ◇ **Шаг:** Пусть  $In[B]^k \leq In[B]^{k-1}$  и  $Out[B]^k \leq Out[B]^{k-1}$

## 3.5 Свойства итеративного алгоритма

### 3.5.3 Монотонность итераций

- ◇ **Утверждение 1.** Пусть  $In[B]^i$  и  $Out[B]^i$  – значения  $In[B]$  и  $Out[B]$  после  $i$ -ой итерации. Если структура потока данных монотонна, то

$$In[B]^{i+1} \leq In[B]^i \text{ и } Out[B]^{i+1} \leq Out[B]^i$$

- ◇ Индукция по  $i$ .

- ◇ **Шаг:** Пусть  $In[B]^k \leq In[B]^{k-1}$  и  $Out[B]^k \leq Out[B]^{k-1}$

$$In[B]^{k+1} = \bigwedge_{P \in Pred(B)} Out[P]^k \leq \bigwedge_{P \in Pred(B)} Out[P]^{k-1} = In[B]^k$$

так как операция сбора монотонна.

## 3.5 Свойства итеративного алгоритма

### 3.5.3 Монотонность итераций

- ◇ **Утверждение 1.** Пусть  $In[B]^i$  и  $Out[B]^i$  – значения  $In[B]$  и  $Out[B]$  после  $i$ -ой итерации. Если структура потока данных монотонна, то

$$In[B]^{i+1} \leq In[B]^i \text{ и } Out[B]^{i+1} \leq Out[B]^i$$

- ◇ Индукция по  $i$ .

- ◇ **Шаг:** Пусть  $In[B]^k \leq In[B]^{k-1}$  и  $Out[B]^k \leq Out[B]^{k-1}$

$$In[B]^{k+1} = \bigwedge_{P \in Pred(B)} Out[P]^k \leq \bigwedge_{P \in Pred(B)} Out[P]^{k-1} = In[B]^k$$

так как операция сбора монотонна.

$$Out[B]^{k+1} = f_B(In[B]^{k+1}) \leq f_B(In[B]^k) = Out[B]^k,$$

так как передаточная функция  $f_B(x)$  монотонна.

## 3.5 Свойства итеративного алгоритма

### 3.5.3 Монотонность итераций

- ◇ **Утверждение 1.** Пусть  $In[B]^i$  и  $Out[B]^i$  – значения  $In[B]$  и  $Out[B]$  после  $i$ -ой итерации. Если структура потока данных монотонна, то

$$In[B]^{i+1} \leq In[B]^i \text{ и } Out[B]^{i+1} \leq Out[B]^i$$

- ◇ **Следствие.** Для любого  $i$

$$In[B] \leq In[B]^i$$

$$Out[B] \leq Out[B]^i$$

## 3.5 Свойства итеративного алгоритма

### 3.5.3 Монотонность итераций

◇ **Утверждение 2.** Если структура потока данных монотонна, то решение системы уравнений (1), найденное с помощью итеративного алгоритма, является максимальной фиксированной точкой этой системы.

◇ Требуется доказать, что для всех  $j$

$$In[B_j] \leq In[B_j]^{IA}, Out[B_j] \leq Out[B_j]^{IA},$$

где  $\{In[B_j]^{IA}, Out[B_j]^{IA}\}$  – решение системы (1), найденное с помощью итеративного алгоритма,  $\{In[B_j], Out[B_j]\}$  – любое другое решение этой системы.

Аналогично доказательству предыдущего утверждения.

## 3.5 Свойства итеративного алгоритма

### 3.5.4. Сходимость итеративного алгоритма

- ◇ **Определение 1.** *Восходящей цепочкой* в частично упорядоченном множестве  $(L, \leq)$  называется последовательность его элементов, в которой

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

- ◇ **Определение 2.** *Высотой* полурешетки называется наибольшее количество отношений  $<$  в восходящих цепочках.

- ◇ **Утверждение.** Если полурешетка структуры монотонна и имеет конечную высоту, то итеративный алгоритм гарантированно сходится после количества итераций, не превышающего произведения высоты полурешетки на количество базовых блоков.

## 3.5 Свойства итеративного алгоритма

### 3.5.5 Решение, получаемое итеративным алгоритмом (максимальная фиксированная точка)

- ◇ Итеративный алгоритм
  - (1) посещает базовые блоки не в порядке их выполнения, а в порядке обхода ГПУ (на каждой итерации каждый узел посещается только один раз)
  - (2) в каждой точке сбора применяет операцию сбора к значениям потока данных, полученным к этому моменту
  - (3) иногда в пределах итерации базовый блок  $B$  посещается до посещения его предшественников (прямой обход)

## 3.5 Свойства итеративного алгоритма

### 3.5.5 Решение, получаемое итеративным алгоритмом (максимальная фиксированная точка)

- ◇ (4) для процесса итерации *необходимо граничное условие*, так как к блоку *Entry* передаточная функция неприменима.
- (5) в качестве «нулевой итерации» все  $Out[B]$  инициализируются значением  $T$ , которое, по определению, «не меньше» всех значений потока, и, следовательно, того значения, которое оно заменяет; при этом монотонность передаточных функций обеспечивает получение результата, «не меньшего», чем искомое решение:



## 3.5 Смысл решения уравнений потока данных

Без потери общности будем считать, что рассматривается прямая задача (обход графа потока от *Entry* к *Exit*).

Обратная задача (обход графа потока от *Exit* к *Entry*) рассматривается аналогично.

### 3.5.1 Идеальное решение

◇ Пусть  $f_{B_k}$  – передаточная функция блока  $B_k$  в графе потока.

Рассмотрим путь  $P = \text{Entry} \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_{k-1} \rightarrow B_k$

(Путь  $P$  может содержать циклы: базовые блоки могут встречаться в нем по несколько раз).

По определению *передаточная функция пути*  $P$ :

$$f_P = f_{B_1} \circ f_{B_2} \circ \dots \circ f_{B_{k-1}}$$

( $f_{B_k}$  не является частью композиции, так как путь достигает начала блока  $B_k$ , но не его конца). Значение потока данных, создаваемое этим путем,

представляет собой  $f_P(l_{\text{Entry}})$ , где  $l_{\text{Entry}}$  – граничное условие.

## 3.5 Смысл решения уравнений потока данных

### 3.5.1 Идеальное решение

- ◇ Пусть  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots\}$  – множество *всех выполнимых* путей от *Entry* до  $B_k$

Путь  $P$  является *выполнимым* только тогда, когда известно выполнение программы (начальные данные), которое следует в точности по этому пути.

- ◇ Идеальным решением системы уравнений потока данных для  $In[B_k]$  будет:

$$Ideal[B_k] = \bigwedge_{P \in \mathcal{P}} f_P(l_{Entry}).$$

- ◇ Решение  $Ideal[B_k]$  названо идеальным, так как
  - (1) оно наиболее точное и
  - (2) вычислить его почти никогда не удастся, так как поиск всех возможных путей выполнения – задача неразрешимая. Следовательно, требуется поиск приближенного решения.

## 3.5 Смысл решения уравнений потока данных

### 3.5.2 Свойства решений уравнений потока данных для монотонных и дистрибутивных структур

- ◇ Добавление еще одного пути в сбор  $\bigwedge_{P \in P}$  делает решение «меньше» в смысле частичного порядка полурешетки  $\leq$
- ◇ Если просмотрены все выполнимые пути и ни одного лишнего, получается идеальное решение *Ideal*.
- ◇ Решение  $Sol_1$ :  $Ideal \leq Sol_1$ , получается, когда *просмотрены не все выполнимые пути*. Использовать решение  $Sol_1$  опасно, так как для непросмотренных путей преобразования программы могут оказаться неверными (нарушается консервативность).

## 3.5 Смысл решения уравнений потока данных

### 3.5.2 Свойства решений уравнений потока данных для монотонных и дистрибутивных структур

◇ Решение  $Sol_2: Sol_2 \leq Ideal$  обладает следующими свойствами:

- (1)  $Sol_2$  консервативно: оно содержит все выполнимые пути
- (2)  $Sol_2$  неточно: в нем не отсеяны «лишние» пути, т.е. либо не существующие в графе потока, либо существующие, но такие, по которым программа никогда не проследует.

В результате:

- (1)  $Sol_2$  может запрещать некоторые из преобразований, разрешенных решением  $Ideal$ .
- (2) все преобразования, которые разрешает  $Sol_2$ , корректны

◇ В абстракции потока данных предполагается, что каждый путь в графе потока может быть пройден.

## 3.5 Смысл решения уравнений потока данных

### 3.5.3 Решение сбором по всем путям

- ◇ *Решение сбором по всем путям (MOP-решение)* от *Entry* до входа в  $B_k$  определяется соотношением:

$$MOP[B_k] = \bigwedge_{P \in Q} f_P(l_{Entry}),$$

где  $Q = \{P_1, P_2, \dots\}$  – множество *всех* путей от *Entry* до входа в блок  $B_k$

- ◇ Пути, рассматриваемые в *MOP*-решении, – это надмножество всех выполнимых путей: *MOP*-решение собирает значения потоков данных как для всех выполнимых путей, так и для путей, которые не могут быть выполнены. Следовательно, для всех  $B_k$  выполняется соотношение

$$MOP[B_k] \leq Ideal[B_k].$$

## 3.5 Смысл решения уравнений потока данных

### 3.5.3 Решение сбором по всем путям

- ◇ **Замечание.** Для прямой задачи  $MOP[B_k]$  дает значения для  $In[B_k]$ . Для обратной задачи  $MOP[B_k]$  дает значения для  $Out[B_k]$ . Если рассматривается обратная задача,  $MOP$ -решение определяется соотношением :

$$MOP[B_k] = \bigwedge_{P \in Q} f_P(l_{Exit}),$$

где  $Q = \{P_1, P_2, \dots\}$  – множество *всех* путей от выхода из  $B_k$  до  $Exit$ .

- ◇ Если в анализируемой программе есть циклы, количество всех путей, рассматриваемых при построении  $MOP$ -решения, становится бесконечным. Поэтому построить  $MOP$ -решение, как правило, не удастся (невозможно учесть бесконечное множество путей).

## 3.5 Смысл решения уравнений потока данных

### 3.5.4 Решение, получаемое итеративным алгоритмом (максимальная фиксированная точка)

◇ Итеративный алгоритм

- (1) посещает базовые блоки не в порядке их выполнения (как при вычислении *МОР*-решения), а в порядке обхода графа потока (на каждой итерации каждый узел посещается только один раз)
- (2) в каждой точке слияния алгоритм применяет операцию сбора к значениям потока данных, полученным к этому моменту
- (3) иногда в пределах итерации базовый блок *B* посещается до посещения его предшественников (прямой обход)

## 3.5 Смысл решения уравнений потока данных

### 3.5.4 Решение, получаемое итеративным алгоритмом (максимальная фиксированная точка)

- ◇ Следовательно:
  - ◇ необходимо граничное условие, так как к блоку *Entry* передаточная функция не применяется.
  - ◇ необходима инициализация потока данных для выходов из базовых блоков:  $Out[B]$  инициализируется значением  $T$ , которое, как известно, «не меньше» всех значений потока, и, следовательно, того значения, которое оно заменяет.
  - ◇ при использовании  $T$  в качестве входных данных монотонность передаточных функций обеспечивает получение результата, «не меньшего», чем искомое решение:

$$MFP \leq MOP$$



## 3.5 Смысл решения уравнений потока данных

### 3.5.4 Решение, получаемое итеративным алгоритмом (максимальная фиксированная точка)

◇ Пример (см. рисунок)

Требуется вычислить значение  $In[B_4]$ .

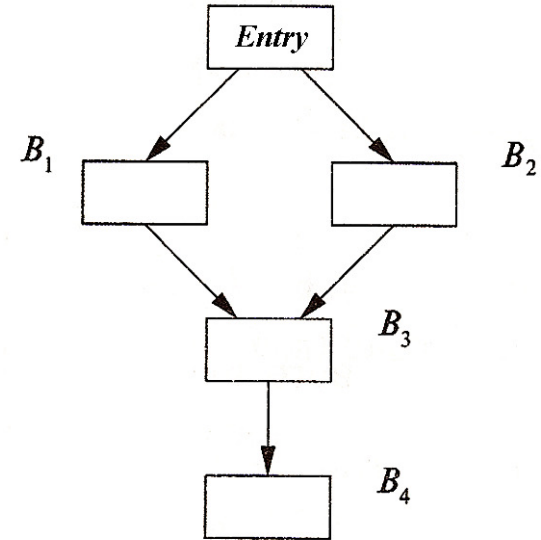
(1) MOP-решение:

$$\begin{aligned} MOP[B_4] &= \\ &= ((f_{B_3} \circ f_{B_1}) \wedge (f_{B_3} \circ f_{B_2}))(l_{Entry}) \end{aligned}$$

(2) Итеративный алгоритм (узлы посещаются в порядке  $B_1, B_2, B_3, B_4$ )

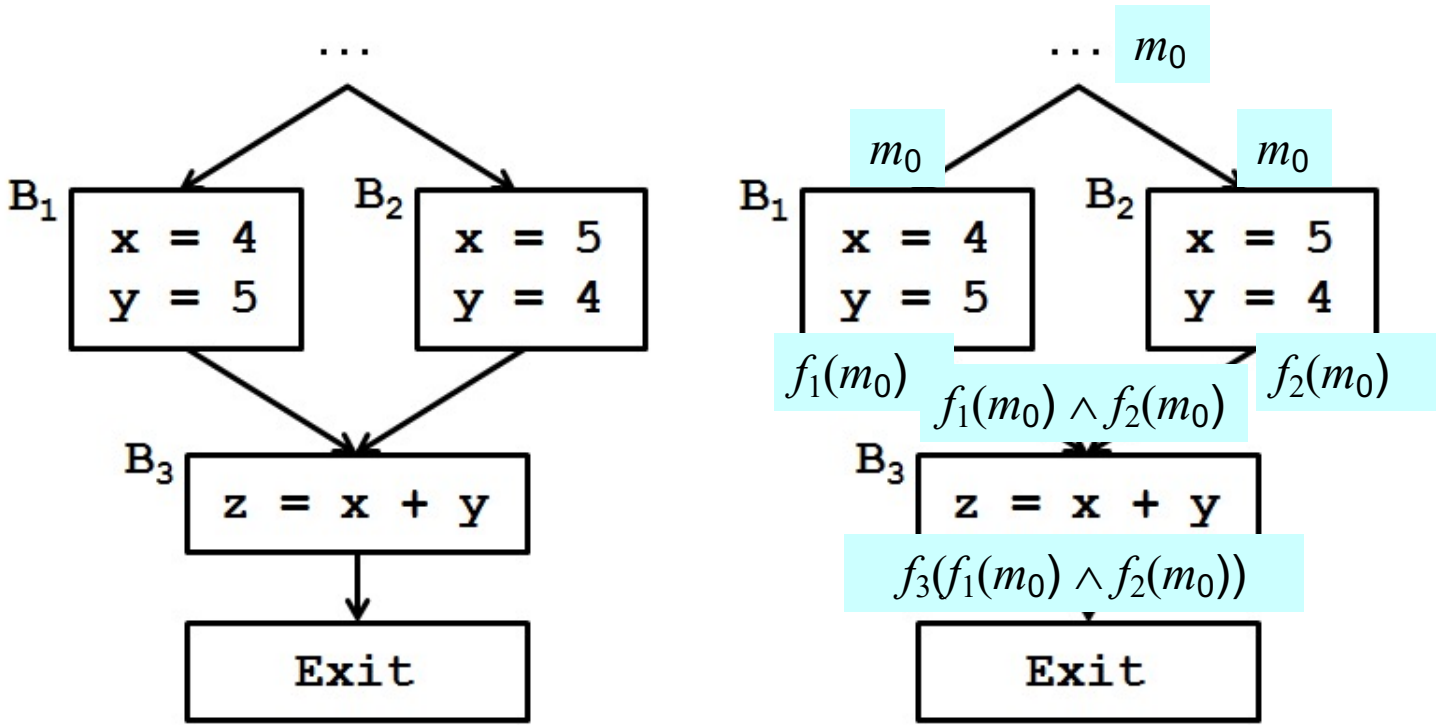
$$In[B_4] = f_{B_3}(f_{B_1}(l_{Entry}) \wedge f_{B_2}(l_{Entry}))$$

Операция сбора  $\wedge$  в итеративном алгоритме применяется раньше, чем при вычислении MOP-решения



# Пример на распространение констант (тема одной из следующих лекций)

Пусть  $f_1, f_2$  и  $f_3$  – передаточные функции блоков  $B_1, B_2$  и  $B_3$  соответственно, а  $m_0$  – состояние на входе в блоки  $B_1$  и  $B_2$ . Тогда



## 3.5 Смысл решения уравнений потока данных

### 3.5.4 Решение, получаемое итеративным алгоритмом (максимальная фиксированная точка)

- ◇ Если структура потока данных дистрибутивна, то

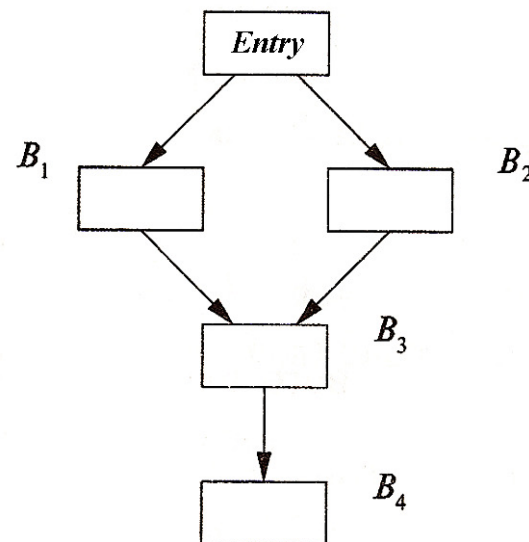
$$In[B_4] = MOP[B_4]$$

если же структура потока данных монотонна, но не дистрибутивна, то

$$In[B_4] \leq MOP[B_4]$$

- ◇ Следовательно, в обоих случаях приближенное решение, представленное максимальной фиксированной точкой (*MFP*-решение), удовлетворяет условию:

$$MFP[B] \leq MOP[B]$$



## 3.5 Смысл решения уравнений потока данных

### 3.5.4 Решение, получаемое итеративным алгоритмом (максимальная фиксированная точка)

- ◇ Если структура потока данных дистрибутивна, то для всех  $B$   
$$MFP[B] = MOP[B].$$
- ◇ В разделах 3.2.5 и 3.2.6 была установлена дистрибутивность структур достигающих определений ( $RD$ ), живых переменных ( $LV$ ) и доступных выражений ( $AE$ ).

Следовательно, в указанных случаях итеративный алгоритм позволяет получить MOP-решение.

## 3.5 Смысл решения уравнений потока данных

### 3.5.5. Консервативность *MFP*-решения

- ◇ **Утверждение.** *MFP*-решение, получаемое итеративным алгоритмом, всегда консервативно

#### ***Доказательство***

Индукция по  $i$ : значения, полученные итеративным алгоритмом после  $i$  итераций, не превосходят результата операции сбора по всем путям длины  $i$ .

Итеративный алгоритм завершается только тогда, когда он получает такой же ответ, как и при неограниченном количестве итераций.

Следовательно,  $MFP \leq MOP$ .

Но уже установлено:  $MOP \leq Ideal$ .

Следовательно (транзитивность  $\leq$ ),  $MFP \leq Ideal$   
и *MFP*-решение консервативно.