4. Доминаторы и постдоминаторы

4.1 Доминаторы

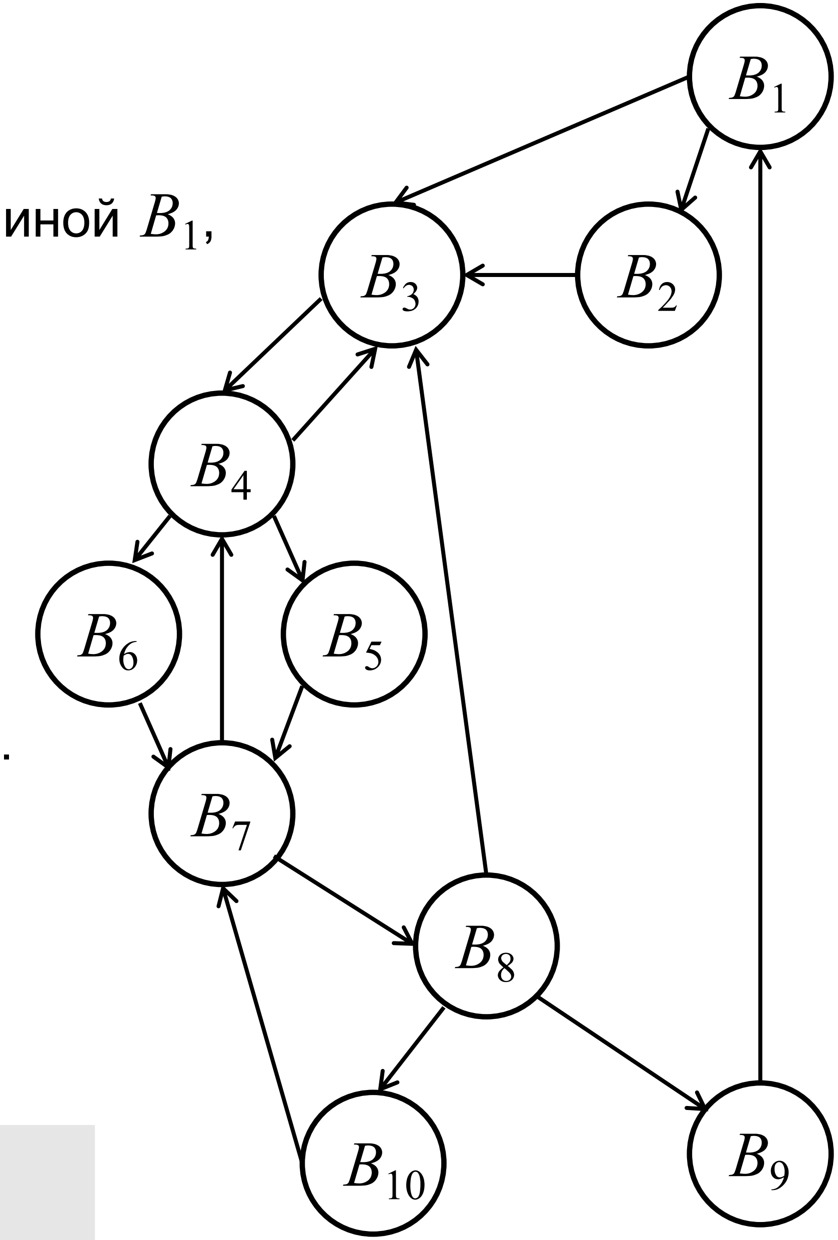
4.1.1 Определение

◊ В ГПУ вершина d является *доминатором* вершины n (этот факт записывается как $d\ dom\ n$ или $d = Dom(n)$), если любой путь от вершины $Entry$ до вершины n проходит через вершину d.

◊ **Замечание**. Из определения 4.2.1 следует, что каждая вершина n является доминатором самой себя, так как путь от $Entry$ до n проходит через n.

4.1 Доминаторы

4.1.2 Примеры доминаторов



◊ Рассмотрим ГПУ с входной вершиной B_1, показанный на рисунке.

◈ B_1 является доминатором всех узлов, включая себя самого.

◈ B_2 является доминатором только себя самого.

◈ B_3 является доминатором всех вершин, кроме B_1 и B_2.

◈ B_4 является доминатором всех вершин, кроме B_1, B_2 и B_3 .

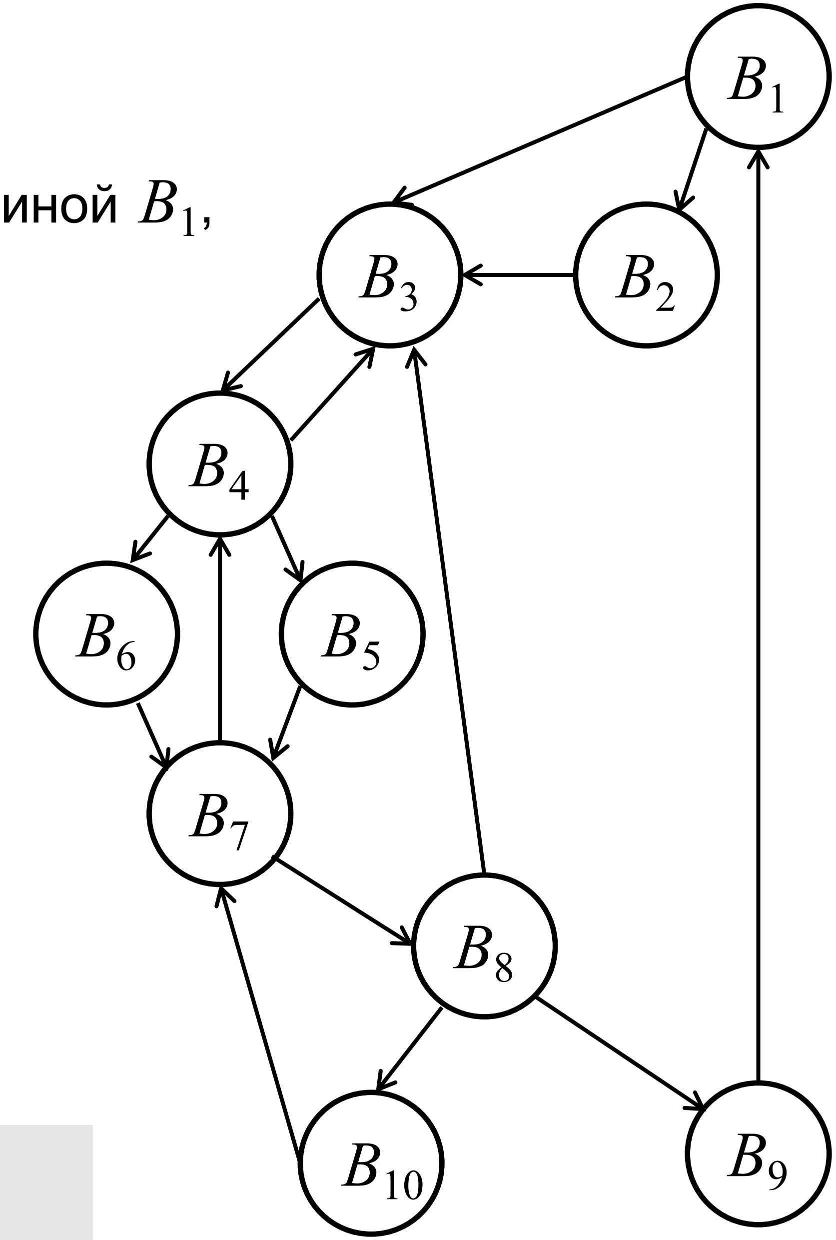
◈ B_5 и B_6 являются доминаторами только себя.

(**Определение.** Вершина d является *доминатором* вершины n, если любой путь от $Entry$ до n проходит через d.)

4.1 Доминаторы
4.1.2 Примеры доминаторов

◊ Рассмотрим ГПУ с входной вершиной B_1, показанный на рисунке.

- B_7 является доминатором вершин B_7, B_8, B_9 и B_{10}.
- B_8 является доминатором вершин B_8, B_9 и B_{10}.
- B_9 и B_{10} являются доминаторами только себя.



(Определение. Вершина d является *доминатором* вершины n, если любой путь от $Entry$ до n проходит через d.)

4.1 *Доминаторы*

4.1.3 Свойства отношения *dom*

◊ 1. Отношение *dom* рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, т.е. является отношением частичного порядка.

(1) *Рефлексивность*: $a\ dom\ a$.

(2) *Антисимметрчность*: если $a\ dom\ b$ и $b\ dom\ a$, то $a = b$.

(3) *Транзитивность*: если $a\ dom\ b$ и $b\ dom\ c$, то $a\ dom\ c$.

◊ 2. Для любой вершины n ГПУ каждый ациклический путь от *Entry* до n проходит через все доминаторы n, причем на всех таких путях доминаторы проходятся в *одном и том же порядке*

4.1 Доминаторы

4.1.3 Свойства отношения *dom*

◊ 3. Вершина i ГПУ является *непосредственным доминатором* вершины n (i *idom* n), если

(1) i *dom* n

(2) не существует вершины m, $m \neq i$, $m \neq n$, такой что i *dom* m и m *dom* n.

◊ 4. У каждой вершины n за исключением *Entry* существует единственный непосредственный доминатор.

◊ 5. Вершина s ГПУ является *строгим доминатором* вершины n (s *sdom* n), если s *dom* n и $s \neq n$.

4.1 Доминаторы

4.1.3 Свойства отношения *dom*

◊ **6** Пусть n – вершина ГПУ,

$Pred(n) = \{p_1, p_2, \ldots , p_k\}$ и $d \neq n$.

Тогда d *dom* n тогда и только тогда, когда $\forall\ i$: d *dom* p_i.

◊ **7** Множество строгих доминаторов вершины n является пересечением множеств доминаторов всех ее предшественников.

4.1 Доминаторы

4.1.4 Алгоритм вычисления доминаторов

◊ **Задача поиска всех доминаторов** вершин ГПУ формулируется как задача анализа потока данных в прямом направлении.

Значением потока данных на входе в блок B является множество вершин (базовых блоков), являющихся доминаторами B.

Операцией сбора является операция пересечения множеств.

Передаточная функция f_B добавляет вершину B к рассматриваемому множеству вершин.

Граничное условие: единственным доминатором вершины $Entry$ является она сама.

4.1 Доминаторы

4.1.4 Алгоритм вычисления доминаторов

◊ **Алгоритм**

Вход: граф потока $G = \langle N, E \rangle$ с входным узлом $Entry$.

Выход: для каждой вершины $n \in N$ множество $D(n)$ ее доминаторов.

Метод: найти решение следующей задачи потока данных (вершины n соответствуют базовым блокам):

$$\forall n \in N \qquad D(n) = Out[Pred(n)].$$

4.1 Доминаторы

4.1.4 Алгоритм вычисления доминаторов

Область определения	Множество подмножеств базовых блоков
Направление обхода	$Forward$
Передаточная функция	$f_B(x) = x \cup \{B\}$
Граничное условие	$Out\,[Entry] = Entry$
Операция сбора ($\wedge$)	$\cap$
Система уравнений	$Out[B] = f_B(In[B])$ $In[B] = \bigcap_{P \in Pred(B)} Out[P]$
Начальное приближение	$Out\,[B] = N$

4.1 Доминаторы

4.1.4 Алгоритм вычисления доминаторов

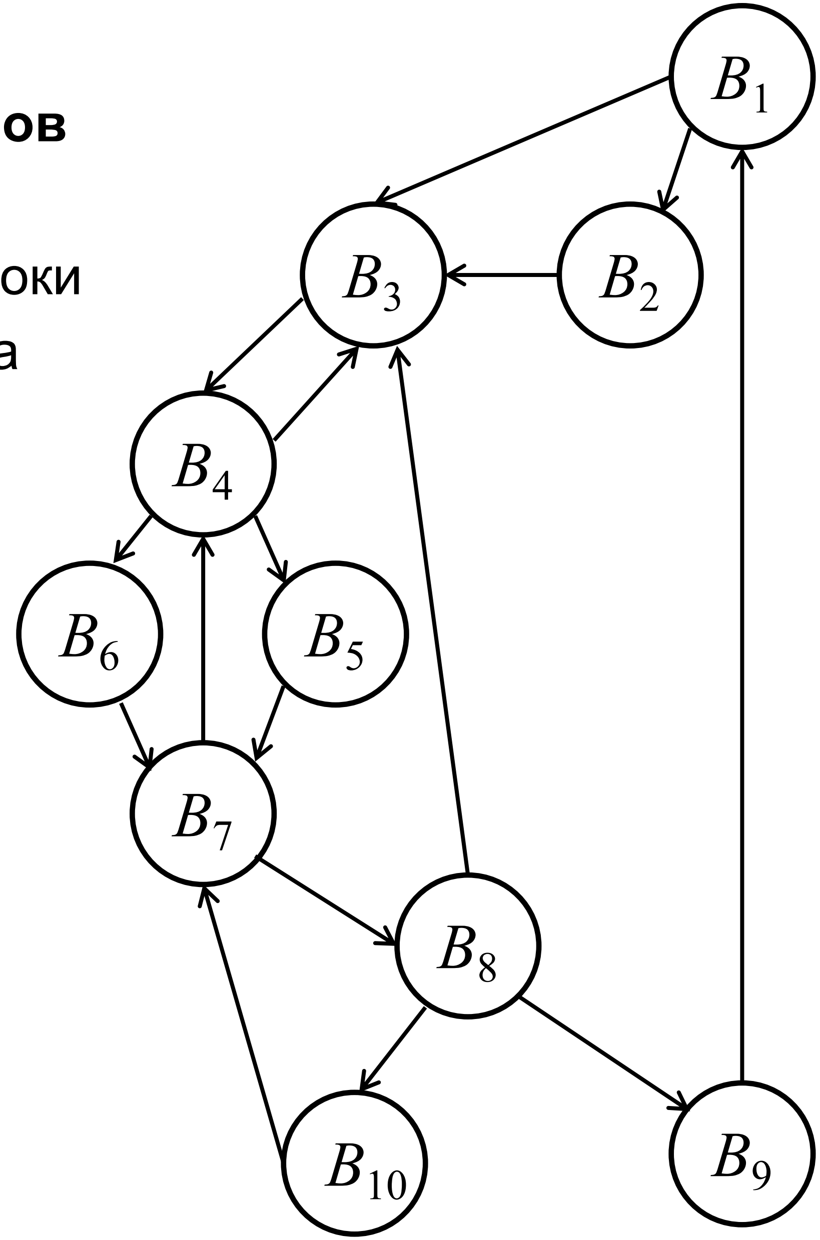
◊ **Пример.** Применим алгоритм к ГПУ на рисунке в предположении, что блоки посещаются в порядке их номеров, а $Entry$ это блок B_1.

◊ **Первая итерация**

Граничное условие: $\boldsymbol{D(B_1) = \{B_1\}}$

$Pred(B_2) = \{B_1\}$

$\boldsymbol{D(B_2) = \{B_2\} \cup D(B_1) = \{B_1, B_2\}}$



4.1 Доминаторы

4.1.4 Алгоритм вычисления доминаторов

◊ **Пример.** Применим алгоритм к ГПУ на рисунке в предположении, что блоки посещаются в порядке их номеров, а *Entry* это блок B_1.

◊ **Первая итерация**

Граничное условие: $\boldsymbol{D(B_1) = \{B_1\}}$

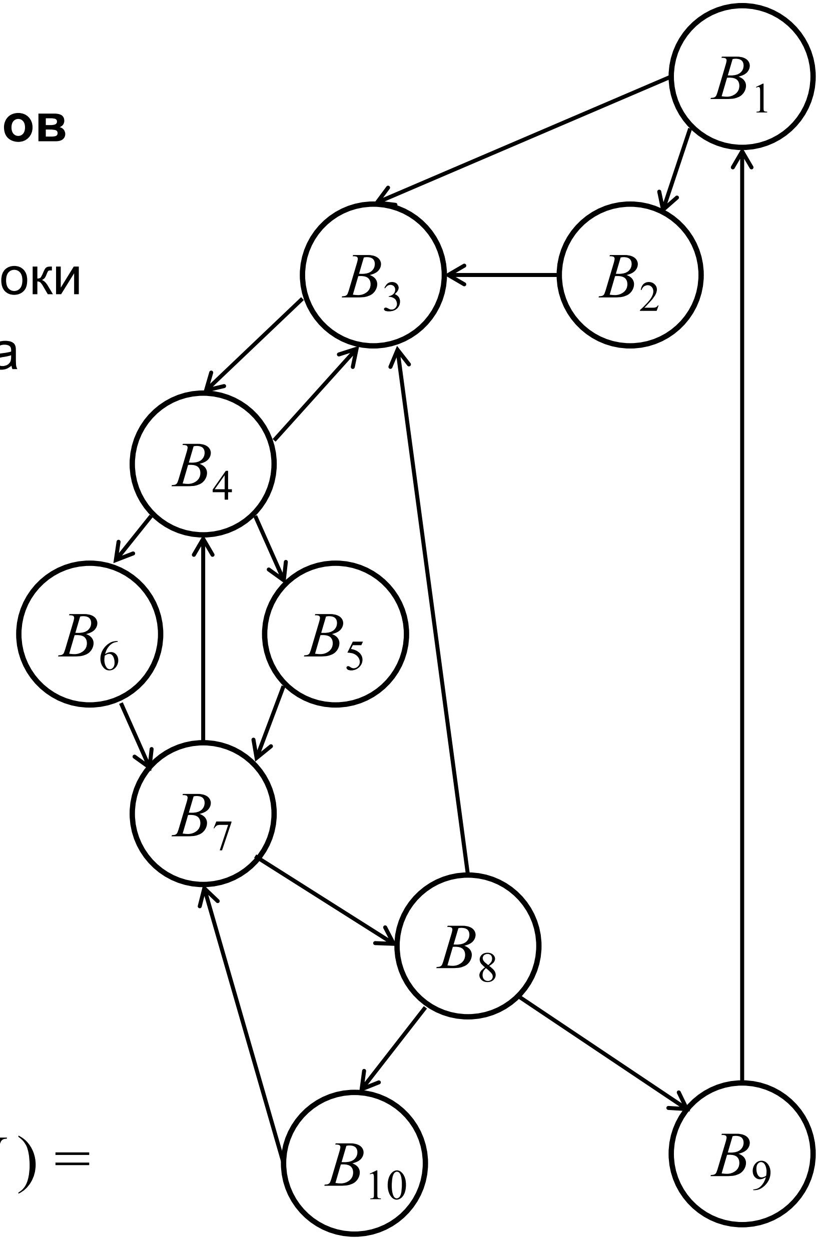
$Pred(B_2) = \{B_1\}$

$\boldsymbol{D(B_2) = \{B_2\} \cup D(B_1) = \{B_1, B_2\}}$

$Pred(B_3) = \{B_1, B_2, B_4, B_8\}$

$\boldsymbol{D(B_3) = \{B_3\} \cup (D(B_1) \cap D(B_2) \cap D(B_4) \cap D(B_8))} = \{B_3\} \cup (\{B_1\} \cap \{B_1, B_2\} \cap N \cap N) = \{B_1, B_3\}$

$N = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}\}$



4.1 Доминаторы
4.1.4 Алгоритм вычисления доминаторов

- ◊ Первая итерация (окончание)

  $Pred(B_4) = \{B_3, B_7\}$

  $$\boldsymbol{D(B_4) = \{B_4\} \cup (D(B_3) \cap D(B_7)) = \{B_4\} \cup (\{B_1, B_3\} \cap N\,) =}$$
  $$\boldsymbol{= \{B_1, B_3, B_4\}}$$

4.1 Доминаторы

4.1.4 Алгоритм вычисления доминаторов

◊ Первая итерация (окончание)

$Pred(B_4) = \{B_3, B_7\}$

$$\boldsymbol{D(B_4) = \{B_4\} \cup (D(B_3) \cap D(B_7)) = \{B_4\} \cup (\{B_1, B_3\} \cap N) =}$$
$$\boldsymbol{= \{B_1, B_3, B_4\}}$$

$Pred(B_5) = Pred(B_6) = \{B_4\}$

$$\boldsymbol{D(B_5) = \{B_5\} \cup D(B_4) = \{B_5\} \cup \{B_1, B_3, B_4\} = \{B_1, B_3, B_4, B_5\}}$$
$$\boldsymbol{D(B_6) = \{B_6\} \cup D(B_4) = \{B_6\} \cup \{B_1, B_3, B_4\} = \{B_1, B_3, B_4, B_6\}}$$

4.1 Доминаторы

4.1.4 Алгоритм вычисления доминаторов

◊ Первая итерация (окончание)

$Pred(B_4) = \{B_3, B_7\}$

$\boldsymbol{D(B_4) = \{B_4\} \cup (D(B_3) \cap D(B_7)) = \{B_4\} \cup (\{B_1, B_3\} \cap N) =}$

$\boldsymbol{= \{B_1, B_3, B_4\}}$

$Pred(B_5) = Pred(B_6) = \{B_4\}$

$\boldsymbol{D(B_5) = \{B_5\} \cup D(B_4) = \{B_5\} \cup \{B_1, B_3, B_4\} = \{B_1, B_3, B_4, B_5\}}$

$\boldsymbol{D(B_6) = \{B_6\} \cup D(B_4) = \{B_6\} \cup \{B_1, B_3, B_4\} = \{B_1, B_3, B_4, B_6\}}$

$Pred(B_7) = \{B_5, B_6, B_{10}\}$

$\boldsymbol{D(B_7) = \{B_7\} \cup (D(B_5) \cap D(B_6)) \cap D(B_{10})) = \{B_7\} \cup (\{B_1, B_3, B_4, B_5\} \cap}$

$\boldsymbol{= \{B_1, B_3, B_4, B_6\} \cap N) = \{B_1, B_3, B_4, B_7\}}$

$Pred(B_8) = \{B_7\}$

4.1 Доминаторы
4.1.4 Алгоритм вычисления доминаторов

◊ Первая итерация (окончание)

$Pred(B_4) = \{B_3, B_7\}$

$\boldsymbol{D(B_4) = \{B_4\} \cup (D(B_3) \cap D(B_7)) = \{B_4\} \cup (\{B_1, B_3\} \cap N) =}$

$\boldsymbol{= \{B_1, B_3, B_4\}}$

$Pred(B_5) = Pred(B_6) = \{B_4\}$

$\boldsymbol{D(B_5) = \{B_5\} \cup D(B_4) = \{B_5\} \cup \{B_1, B_3, B_4\} = \{B_1, B_3, B_4, B_5\}}$

$\boldsymbol{D(B_6) = \{B_6\} \cup D(B_4) = \{B_6\} \cup \{B_1, B_3, B_4\} = \{B_1, B_3, B_4, B_6\}}$

$Pred(B_7) = \{B_5, B_6, B_{10}\}$

$\boldsymbol{D(B_7) = \{B_7\} \cup (D(B_5) \cap D(B_6)) \cap D(B_{10})) = \{B_7\} \cup (\{B_1, B_3, B_4, B_5\} \cap}$

$\boldsymbol{= \{B_1, B_3, B_4, B_6\} \cap N) = \{B_1, B_3, B_4, B_7\}}$

$Pred(B_8) = \{B_7\}$

$\boldsymbol{D(B_8) = \{B_8\} \cup D(B_7) = \{B_8\} \cup \{B_1, B_3, B_4, B_7\} = \{B_1, B_3, B_4, B_7, B_8\}}$

$Pred(B_9) = Pred(B_{10}) = \{B_8\}$

$\boldsymbol{D(B_9) = \{B_9\} \cup D(B_8) = \{B_9\} \cup \{B_1, B_3, B_4, B_7, B_8\} = \{B_1, B_3, B_4, B_7, B_8, B_9\}}$

$\boldsymbol{D(B_{10}) = \{B_{10}\} \cup D(B_8) = \{B_{10}\} \cup \{B_1, B_3, B_4, B_7, B_8\} =}$

$\boldsymbol{= \{B_1, B_3, B_4, B_7, B_8, B_{10}\}}$

4.1.4 Алгоритм вычисления доминаторов

◊ Первая итерация (окончание)

$Pred(B_4) = \{B_3, B_7\}$

$\boldsymbol{D(B_4) = \{B_4\} \cup (D(B_3) \cap D(B_7)) = \{B_4\} \cup (\{B_1, B_3\} \cap N) =}$

$\boldsymbol{= \{B_1, B_3, B_4\}}$

$Pred(B_5) = Pred(B_6) = \{B_4\}$

$\boldsymbol{D(B_5) = \{B_5\} \cup D}$ … $\boldsymbol{{}_3, B_4, B_5\}}$

$\boldsymbol{D(B_6) = \{B_6\} \cup D}$ … $\boldsymbol{{}_3, B_4, B_6\}}$

$Pred(B_7) = \{B_5, B$ …

$\boldsymbol{D(B_7) = \{B_7\} \cup (}$ … $\boldsymbol{(\{B_1, B_3, B_4, B_5\} \cap}$

$\boldsymbol{= \{B_1, B_3, B_4, B_6\} \cap N) = \{B_1, B_3, B_4, B_7\}}$

Полученные значения $D(B_1) - D(B_{10})$ на второй итерации не изменяются

$Pred(B_8) = \{B_7\}$

$\boldsymbol{D(B_8) = \{B_8\} \cup D(B_7) = \{B_8\} \cup \{B_1, B_3, B_4, B_7\} = \{B_1, B_3, B_4, B_7, B_8\}}$

$Pred(B_9) = Pred(B_{10}) = \{B_8\}$

$\boldsymbol{D(B_9) = \{B_9\} \cup D(B_8) = \{B_9\} \cup \{B_1, B_3, B_4, B_7, B_8\} = \{B_1, B_3, B_4, B_7, B_8, B_9\}}$

$\boldsymbol{D(B_{10}) = \{B_{10}\} \cup D(B_8) = \{B_{10}\} \cup \{B_1, B_3, B_4, B_7, B_8\} =}$

$\boldsymbol{= \{B_1, B_3, B_4, B_7, B_8, B_{10}\}}$

4.1 Доминаторы

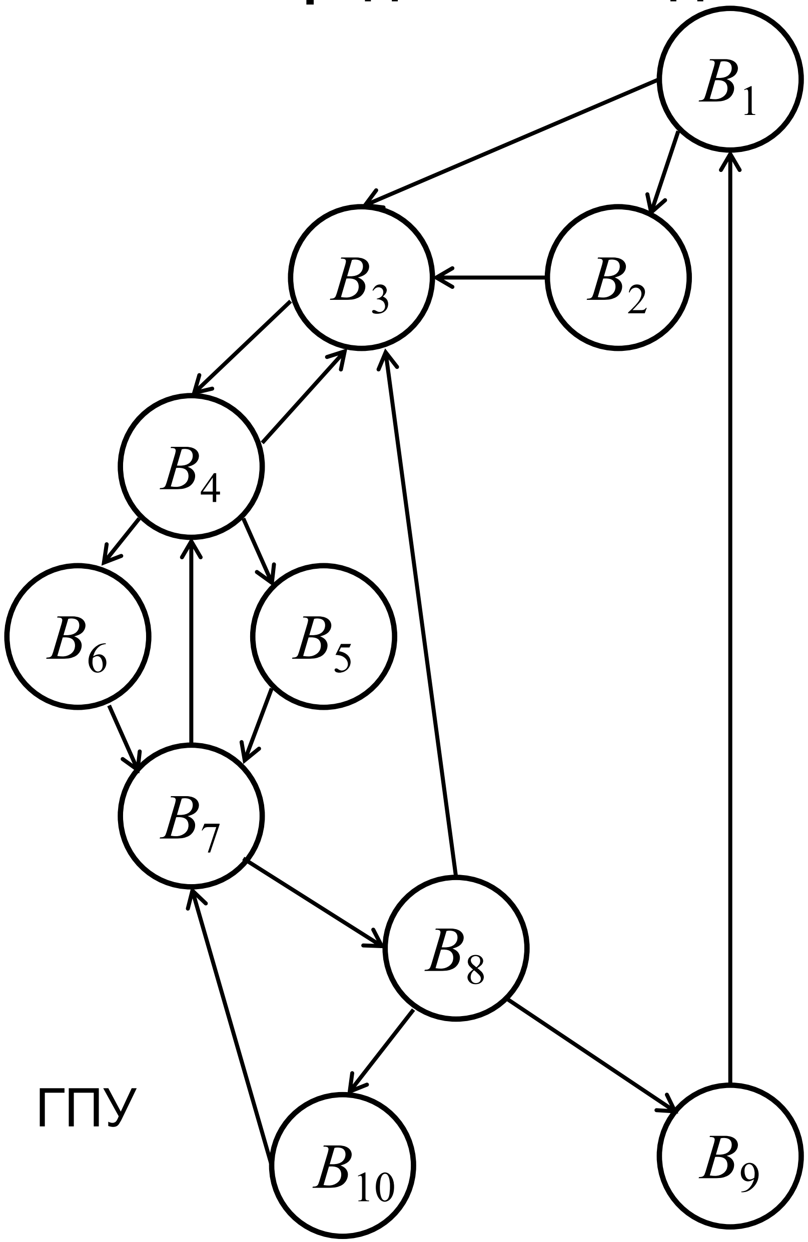
4.1.5 Непосредственные доминаторы и дерево доминаторов

n	$D(n)$	$IDom(n)$
B_1	B_1	–
B_2	$\boldsymbol{B_1}, B_2$	B_1
B_3	$\boldsymbol{B_1}, B_3$	B_1
B_4	$B_1, \boldsymbol{B_3}, B_4$	B_3
B_5	$B_1, B_3, \boldsymbol{B_4}, B_5$	B_4
B_6	$B_1, B_3, \boldsymbol{B_4}, B_6$	B_4
B_7	$B_1, B_3, \boldsymbol{B_4}, B_7$	B_4
B_8	$B_1, B_3, B_4, \boldsymbol{B_7}, B_8$	B_7
B_9	$B_1, B_3, B_4, B_7, \boldsymbol{B_8}, B_9$	B_8
B_{10}	$B_1, B_3, B_4, B_7, \boldsymbol{B_8}, B_{10}$	B_8

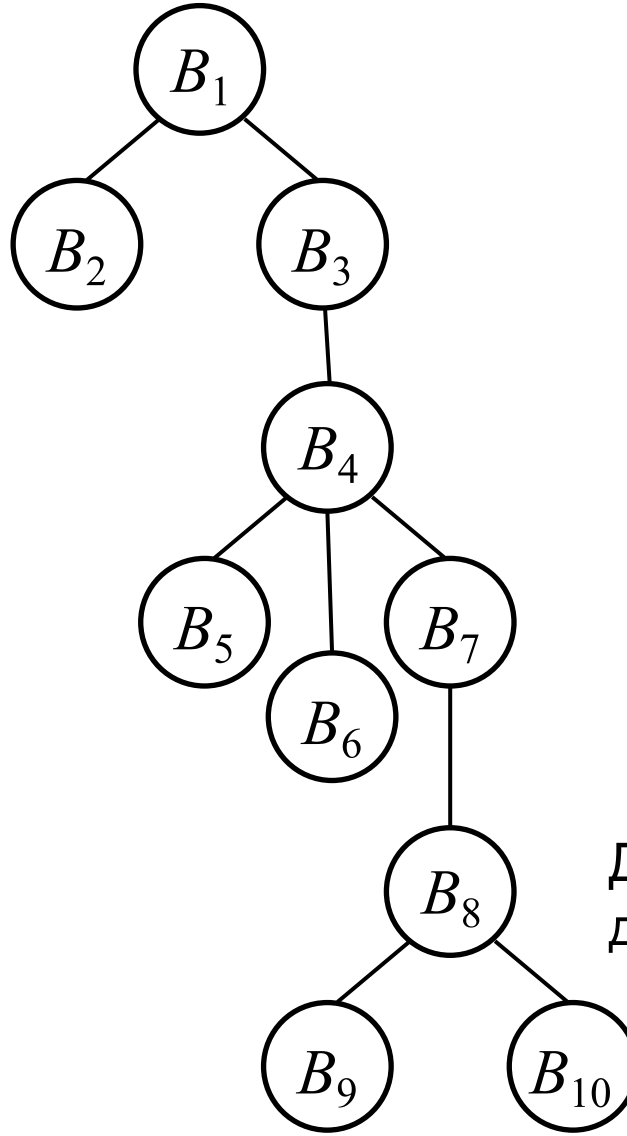
В таблице приведены списки доминаторов каждой вершины ГПУ из рассмотренного примера. Непосредственный доминатор в каждом списке предпоследний. Соединив дугами для каждого $n \in N$ $IDom(n)$ с n, получим дерево доминаторов. Оно изображено на следующем слайде

4.1 Доминаторы

4.1.5 Непосредственные доминаторы и дерево доминаторов



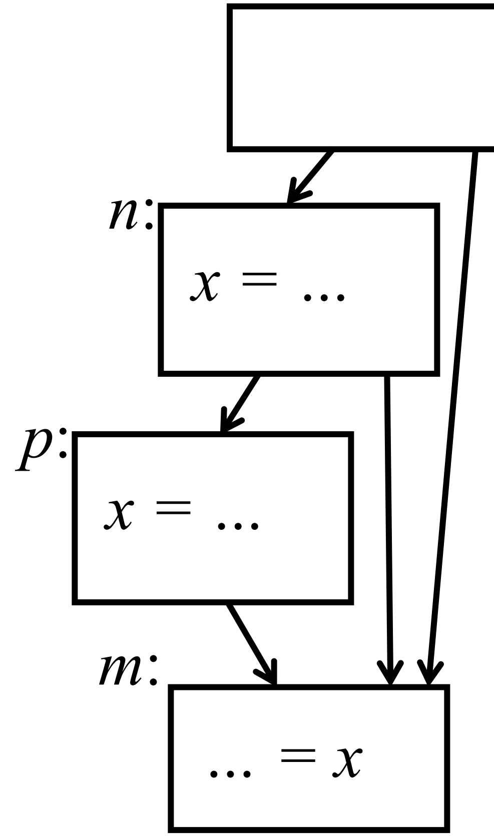
ГПУ



Дерево доминаторов

4.2 Граница доминирования

4.2.1. Определение границы доминирования (*Dominance Frontier*)



◊ **Определение**. Множество узлов m, удовлетворяющих условиям:

(1) n является доминатором предшественника m:

$$\exists p \in Pred(m) \;\&\; n \in Dom(p)$$

(2) n не является строгим доминатором m

$$n \notin (Dom\ (m) - \{m\}).$$

называется *границей доминирования* ***n*** и обозначается $DF(n)$.

◊ **Неформально**: $DF(n)$ содержит все **первые** узлы, которые достижимы из n, на любом пути графа потока, проходящем через n, но над которыми n не доминирует.

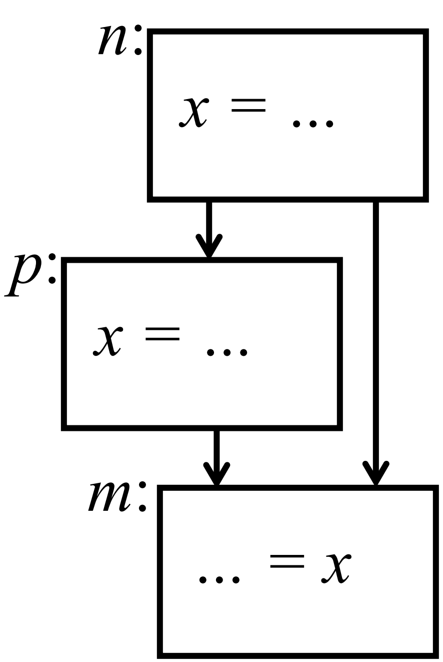
4.2 Граница доминирования

4.2.1. Определение границы доминирования (*Dominance Frontier*)

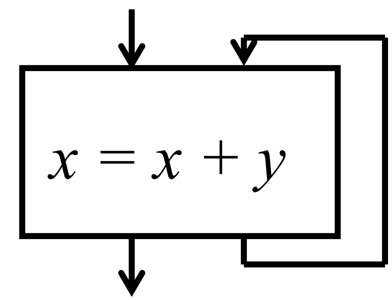
◊ **Замечание**. Условие (2) Определения 4.2.1

«(2) n не является строгим доминатором m» необходимо для определения границы доминирования

в случае цикла, тело которого состоит из единственного базового блока, показанном на нижнем рисунке: в этом случае n, m и p совпадают и n является своей собственной границей доминирования.



$n = m = p$:



На левом рисунке n – строгий доминатор m.
На правом рисунке n – нестрогий доминатор m.

4.2 Граница доминирования

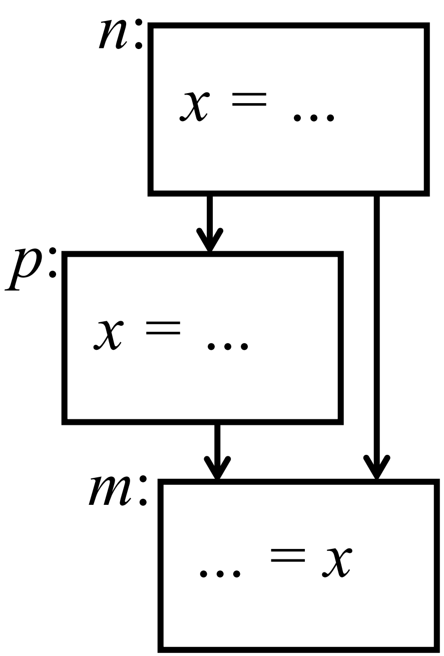
4.2.1. Определение границы доминирования (*Dominance Frontier*)

◊ На рисунках показаны три варианта границ доминирования:

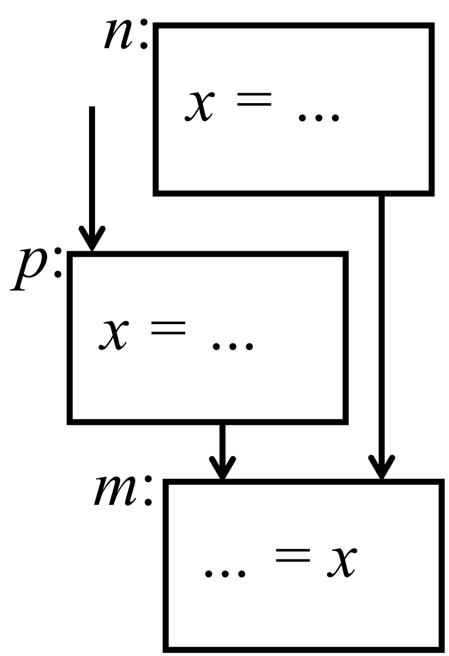
(a) n – строгий доминатор m

(b) n – не доминатор m

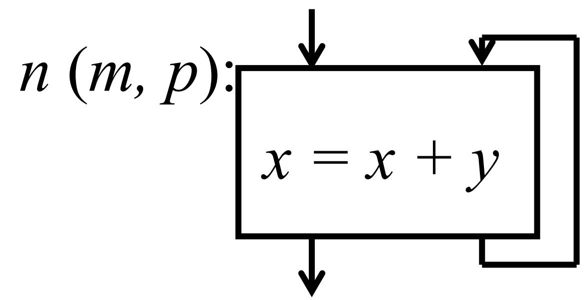
(c) n – нестрогий доминатор m $(n = m = p)$



(a)



(b)



(c)

4.2 Граница доминирования

4.2.1. Определение границы доминирования

◊ **Пример.** На рисунке справа

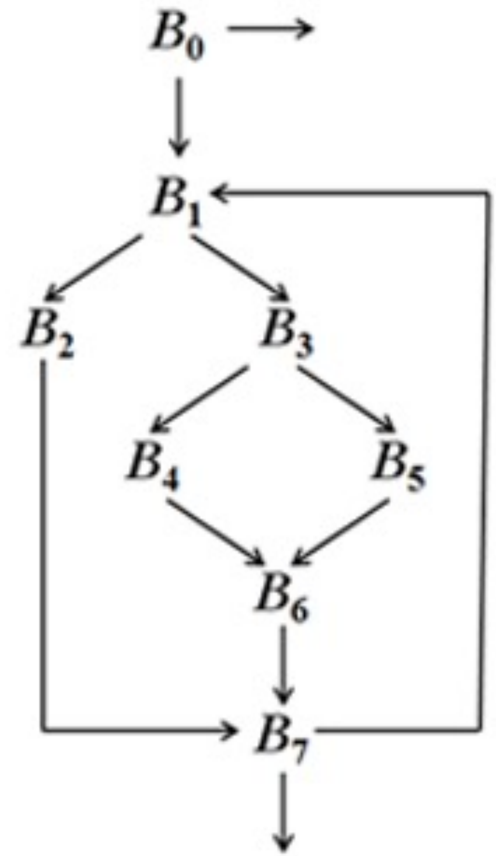
$B_3 \in Dom(B_4)$, $B_3 \in Dom(B_5)$,

$B_3 \in Dom(B_6)$,

$B_3 \notin (Dom(B_7) - \{B_7\})$,

т.е. B_3 является доминатором B_4, B_5 и B_6,

но не является доминатором B_7.



Более того, на любом пути, выходящем из B_3,

B_7 – первая вершина, для которой

B_3 не является доминатором

Следовательно, $\boldsymbol{B_7 \in DF(B_3)}$

а так как узел B_3 не является доминатором

узлов B_0, B_1 и B_2, то $\boldsymbol{DF(B_3) = \{B_7\}}$

4.2 Граница доминирования

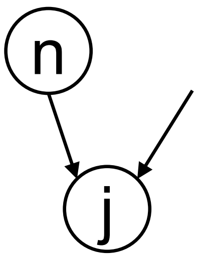
4.2.2. Построение границы доминирования

◊ Свойства узлов, входящих в границу доминирования

(1) узел, принадлежащий границе доминирования, должен быть точкой сбора графа потока.

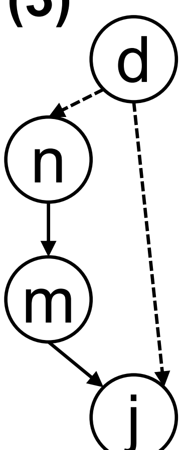
(2) если j – точка сбора: $n \in Pred(j)\ \&\ n \notin Dom(j)$,

то $j \in DF(n)$



т.е. точка сбора j входит в границу доминирования любого своего предшественника n, не являющегося доминатором j.

(3) если j – точка сбора:



$m \in Pred(j)\ \&\ n \in Dom(m)\ \&\ n \notin Dom(j)$, то $j \in DF(n)$

т.е. доминаторы предшественников точки сбора j должны иметь j в своих множествах границ доминирования, если только они не доминируют над j.

4.2 Граница доминирования

4.2.2. Построение границы доминирования

◊ Свойства узлов границы доминирования позволяют составить простой алгоритм ее построения

Шаг 1. Найти все точки сбора *j* графа потока, т.е. все узлы j, у которых $|Pred(j)|$ > 1.

Шаг 2. Исследовать каждый узел $p \in Pred(j)$ и продвинуться по дереву доминаторов, начиная с p и вплоть до непосредственного доминатора j: при этом j входит в состав границы доминирования каждого из пройденных узлов, за исключением непосредственного доминатора j.

4.2 Граница доминирования

4.2.3. Алгоритм построения границ доминирования

◊ **Вход**: граф потока

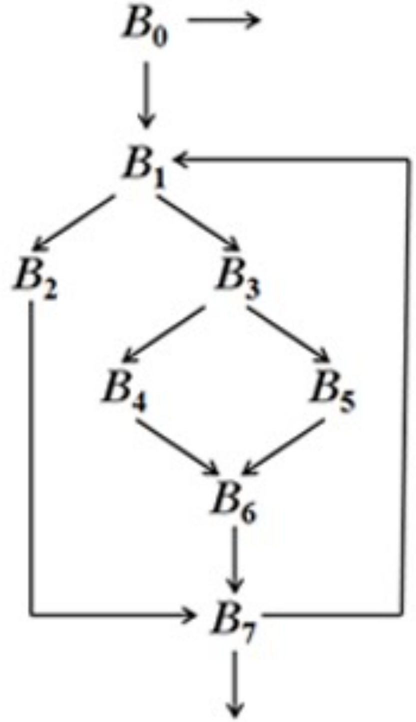
◊ **Выход**: множество границ доминирования для узлов графа потока

◊ **Метод**: выполнить следующую программу:

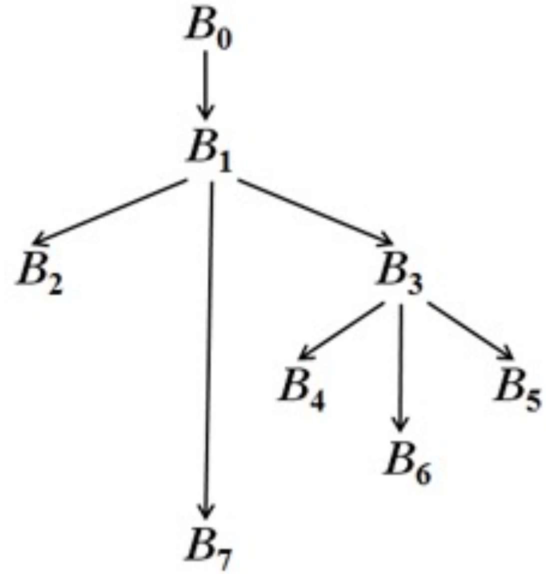
for all $n \in N$ **do** $DF(n) = \varnothing$;
for all $n \in N$ **do**
  {**if** $|Pred(n)| > 1$ **then**
    for each $p \in Pred(n)$ **do**
      {$r = p$;
       while $r \neq IDom(n)$ **do**
        {$DF(r) = DF(r) \cup \{n\}$;
         $r = IDom(r)$;
        }
      };
  }

4.2 Граница доминирования

4.2.4. Пример применения алгоритма построения границ доминирования



Граф потока управления

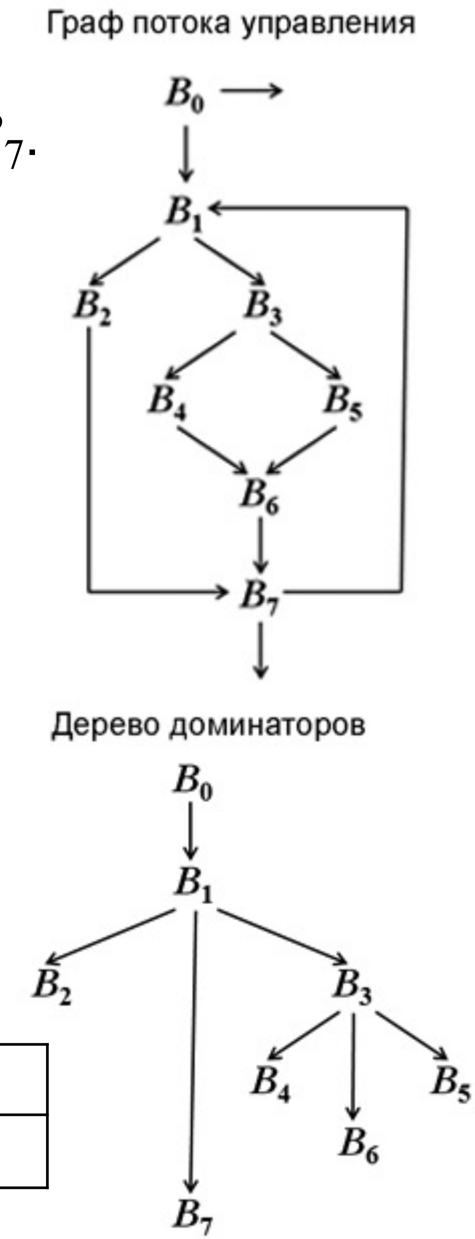


Дерево доминаторов

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$Pred(n)$	$\varnothing$	{0,7}	{1}	{1}	{3}	{3}	{4, 5}	{2, 6}
$Dom(n)$	{0}	{0,1}	{0,1,2}	{0,1,3}	{0,1,3,4}	{0,1,3,5}	{0,1,3,6}	{0,1,7}
$Idom(n)$	$\varnothing$	{0}	{1}	{1}	{3}	{3}	{3}	{1}

4.2 Граница доминирования

4.2.4. Пример применения алгоритма построения границ доминирования



◊ У графа три точки сбора – входы в узлы B_1, B_6 и B_7.

Узел $\boldsymbol{B_6}$: $Pred(B_6) = \{B_4, B_5\}$, $Idom(B_6) = \{B_3\}$,

проходим от B_5 до B_3, добавляем B_6 к $DF(B_5)$,
проходим от B_4 до B_3, добавляем B_6 к $DF(B_4)$.

Узел $\boldsymbol{B_7}$: $Pred(B_7) = \{B_2, B_6\}$, $Idom(B_7) = \{B_1\}$,

проходим от B_2 до B_1, добавляем B_7 к $DF(B_2)$,
проходим от B_6 до B_3, добавляем B_7 к $DF(B_6)$
проходим от B_3 до B_1, добавляем B_7 к $DF(B_3)$

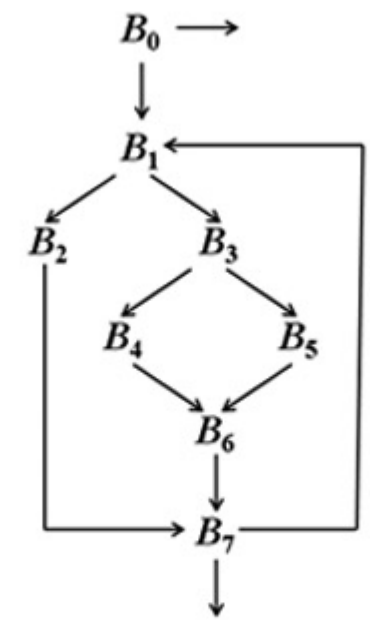
◊ Таблица текущих результатов:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$DF(B_n)$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{B_7\}$	$\{B_7\}$	$\{B_6\}$	$\{B_6\}$	$\{B_7\}$	$\varnothing$

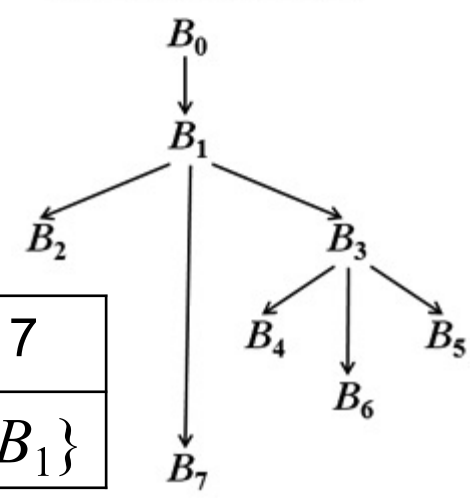
4.2 Граница доминирования

4.2.4. Пример применения алгоритма построения границ доминирования

Граф потока управления



Дерево доминаторов



◊ **Узел $\boldsymbol{B_1}$**: $Pred(B_1) = \{B_0, B_7\}$, $Idom(B_1) = \{B_0\}$,

У B_0 нет непосредственного доминатора:
$Idom(B_0) = \varnothing$,
значит $B_1 \notin DF(B_0)$.

проходим от B_7 до B_1 (по обратному ребру),
добавляем B_1 к $DF(B_7)$.

проходим от B_1 до B_0,
добавляем B_1 к $DF(B_1)$.

◊ **Окончательная таблица результатов:**

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$DF(B_n)$	$\varnothing$	$\{B_1\}$	$\{B_7\}$	$\{B_7\}$	$\{B_6\}$	$\{B_6\}$	$\{B_7\}$	$\{B_1\}$

4.3 Постдоминаторы

4.3.1 Определение

◊ В ГПУ вершина p является *постдоминатором* вершины n (этот факт записывается как p $postdom$ n или $p = Postdom(n)$), если любой путь от вершины n до вершины $Exit$ проходит через вершину d.

◊ **Замечание**. Из определения 4.2.1 следует, что каждая вершина n является постдоминатором самой себя: путь от n до $Exit$ проходит через n.

4.3 Постдоминаторы

4.3.2 Определения

◊ *Обратным графом* ориентированного графа $G = \langle N, E \rangle$ называется ориентированный граф $G^R = \langle N, E^R \rangle$, у которого направления всех ребер противоположны.

◊ **Постдоминаторы ГПУ – это доминаторы его *обратного графа*.**

◊ *Обратная граница доминирования* $(RDF(n))$ вершины $n \in G$ это обычная граница доминирования в обратном графе G^R.

4.3 Постдоминаторы

4.3.3 Применение постдоминаторов. Зависимость по управлению.

- ◊ По определению, вершина m ГПУ *зависит по управлению* от вершины n тогда, и только тогда, когда:
  - существует непустой путь T от n до m, такой что $\forall k \in T - \{n\}: m = Postdom(k)$, т.е. если выполнение программы пошло по пути T, то, чтобы достичь $exit$, оно обязательно пройдет через m.
  - m не обязательно является строгим постдоминатором n: у n может быть несколько выходов, так что помимо T возможны и другие пути, проходящие через n, но потом ведущие не в m, а в другие вершины.
- ◊ Обратная граница доминирования позволяет определять границы зависимостей по управлению.

4.3 Постдоминаторы

4.3.4 Эквивалентность по управлению

◊ **Определение**. Два базовых блока B_i и B_j *эквивалентны по управлению*, если B_i выполняется тогда, и только тогда, когда выполняется B_j .

◊ **Утверждение**. Если выполняются соотношения:

$B_i = Dom(B_j)$ и $B_j = Postdom(B_i)$

то базовые блоки B_i и B_j эквивалентны по управлению