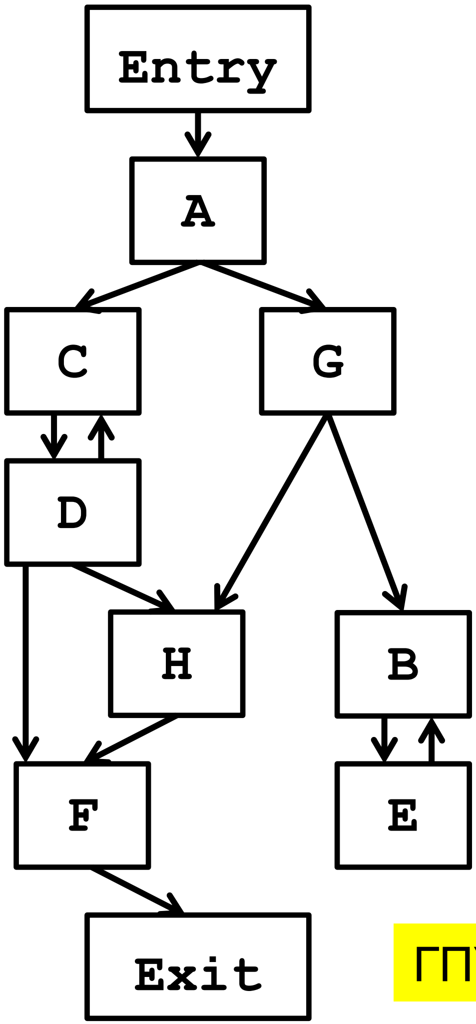
2. Построение множеств Input и Output

2.1 Нумерация вершин ГПУ

2.1.1 Остовное дерево

◊ Чтобы пронумеровать вершины ГПУ, построим его *остовное дерево* (ОД) с корнем в вершине **`Entry`** и обойдем это дерево слева направо «сначала в глубину», используя «обратную нумерацию»



ГПУ

Остовное дерево графа содержит **все** вершины графа и часть его дуг.

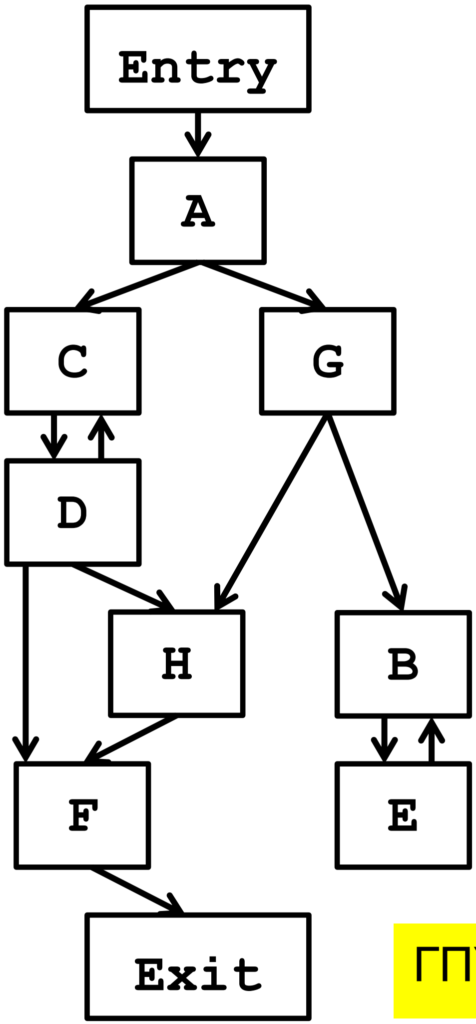
Обратная нумерация используется для того, чтобы, например, вершина A имела номер 1, а не 8.

2.1 Нумерация вершин ГПУ

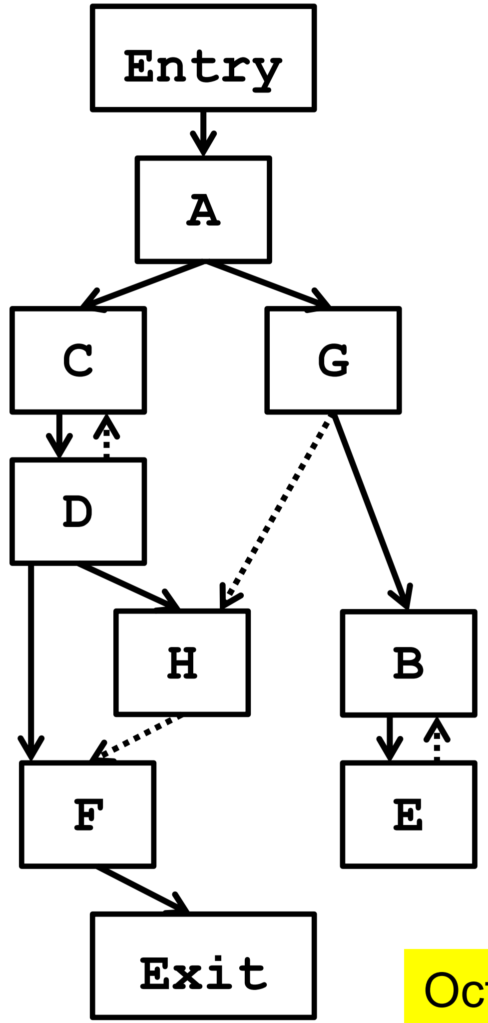
2.1.2 Глубинное остовное дерево

◊ Чтобы пронумеровать вершины ГПУ, построим его *остовное дерево* (ОД) с корнем в вершине **Entry** и обойдем это дерево слева направо «сначала в глубину», используя «обратную нумерацию»

«Лишние» дуги ГПУ, не вошедшие в ОД, на рисунке изображены пунктиром



ГПУ

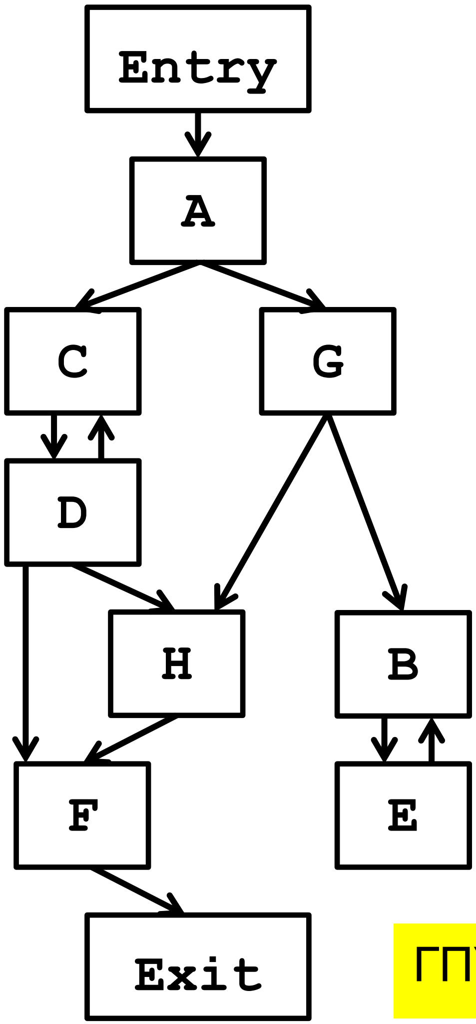


Остовное дерево

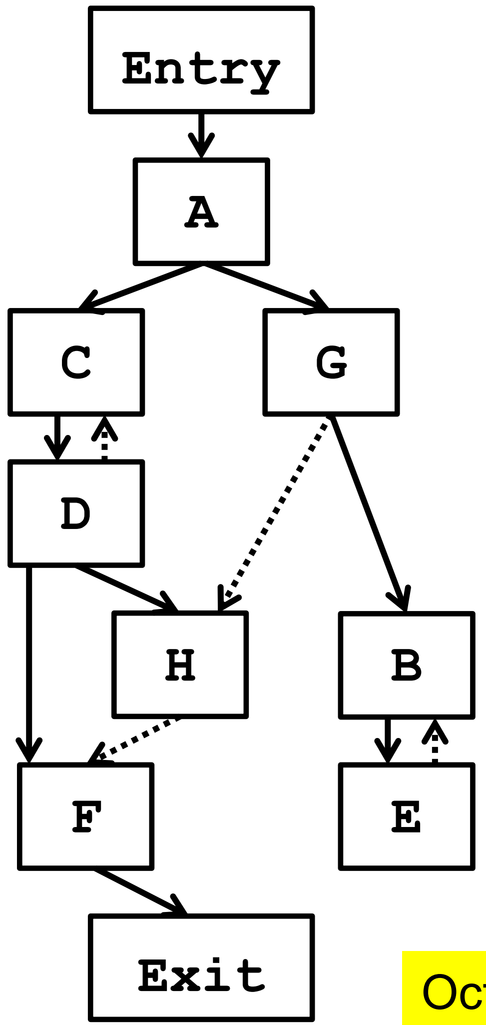
2.1 Нумерация вершин ГПУ

2.1.2 Глубинное остовное дерево

◊ Чтобы пронумеровать вершины ГПУ, построим его *остовное дерево* (ОД) с корнем в вершине **`Entry`** и обойдем это дерево слева направо «сначала в глубину», используя «обратную нумерацию»



ГПУ



Остовное дерево

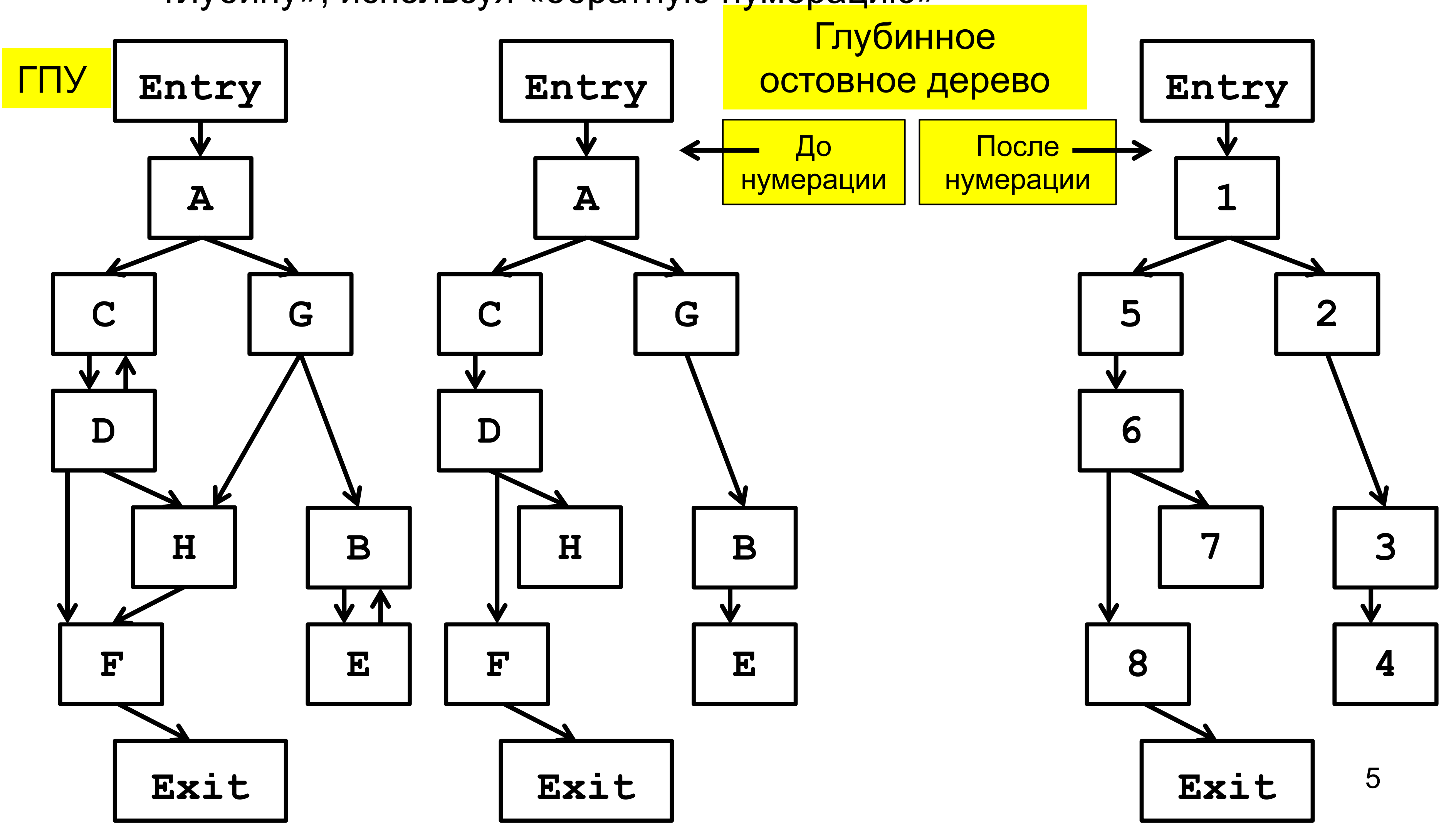
«Лишние» дуги ГПУ, не вошедшие в ОД, на рисунке изображены пунктиром

Такое остовное дерево будем называть глубинным остовным деревом, чтобы помнить, как пронумерованы его вершины

2.1 Нумерация вершин ГПУ

2.1.1 Глубинное остовное дерево

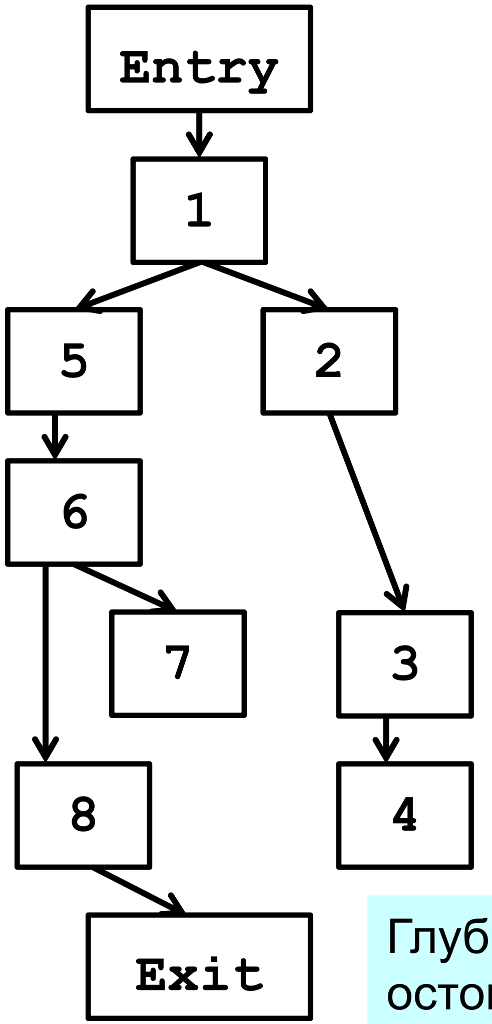
◊ Чтобы пронумеровать вершины ГПУ, построим его *остовное дерево* (ОД) с корнем в вершине **Entry** и обойдем его слева направо «сначала в глубину», используя «обратную нумерацию»



2.1 Нумерация вершин ГПУ

2.1.1 Глубинное остовное дерево

◊ Чтобы пронумеровать вершины ГПУ, построим его *остовное дерево* (ОД) с корнем в вершине **`Entry`** и обойдем его слева направо «сначала в глубину», используя «обратную нумерацию»



Глубинное остовное дерево

В случае обратной нумерации вершин графа, содержащего n вершин i-ой вершине присваивается номер $n - i$

На остовном дереве идентификаторы вершин заменяем их номерами

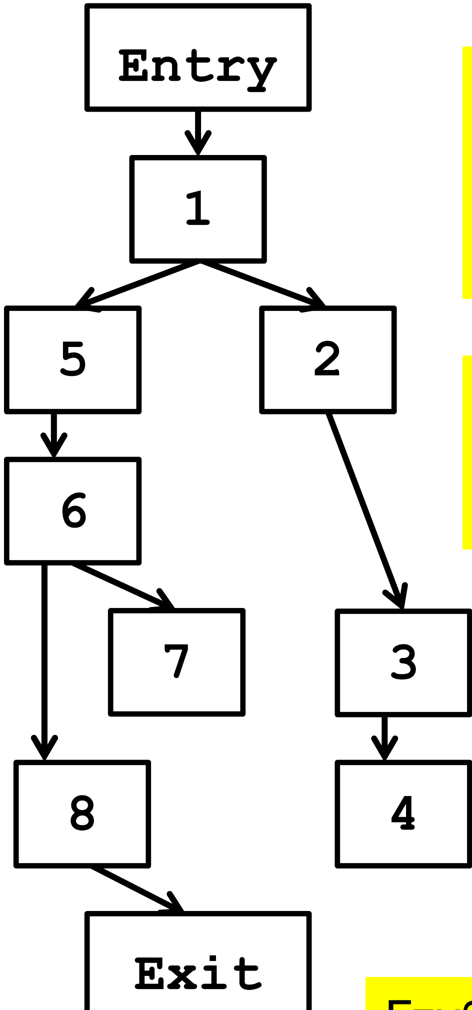
Остовное дерево с корнем в **`Entry`** и такой нумерацией вершин называется *глубинным остовным деревом – DFST*).

DFST – Depth First Spanning Tree

2.1 Нумерация вершин ГПУ

2.1.1 Глубинное остовное дерево

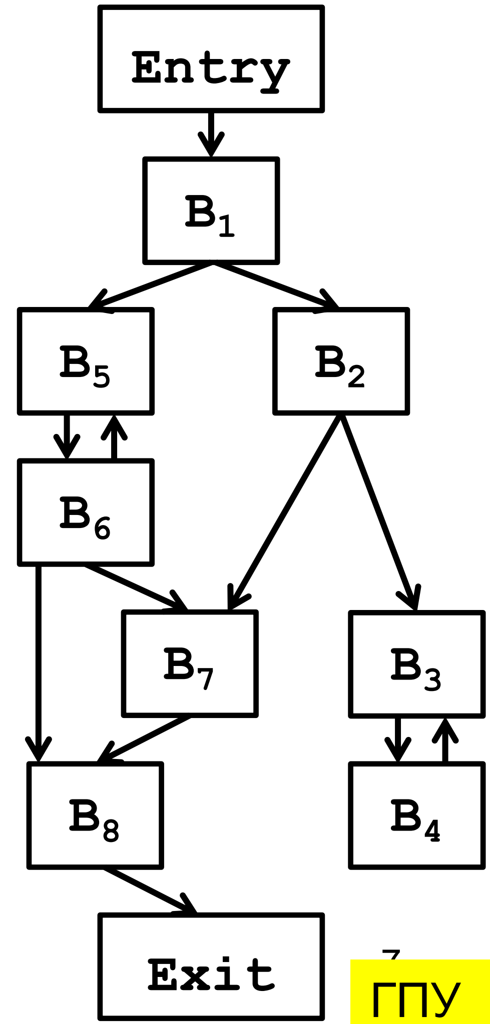
◊ Чтобы пронумеровать вершины ГПУ, построим его *остовное дерево* (ОД) с корнем в вершине **`Entry`** и обойдем его слева направо «сначала в глубину», используя «обратную нумерацию»



Глубинное остовное дерево

Присвоив номера вершин остовного дерева соответствующим базовым блокам, получим ГПУ с пронумерованными вершинами.

Нумерация вершин ГПУ определяет порядок их посещения во время обходов ГПУ

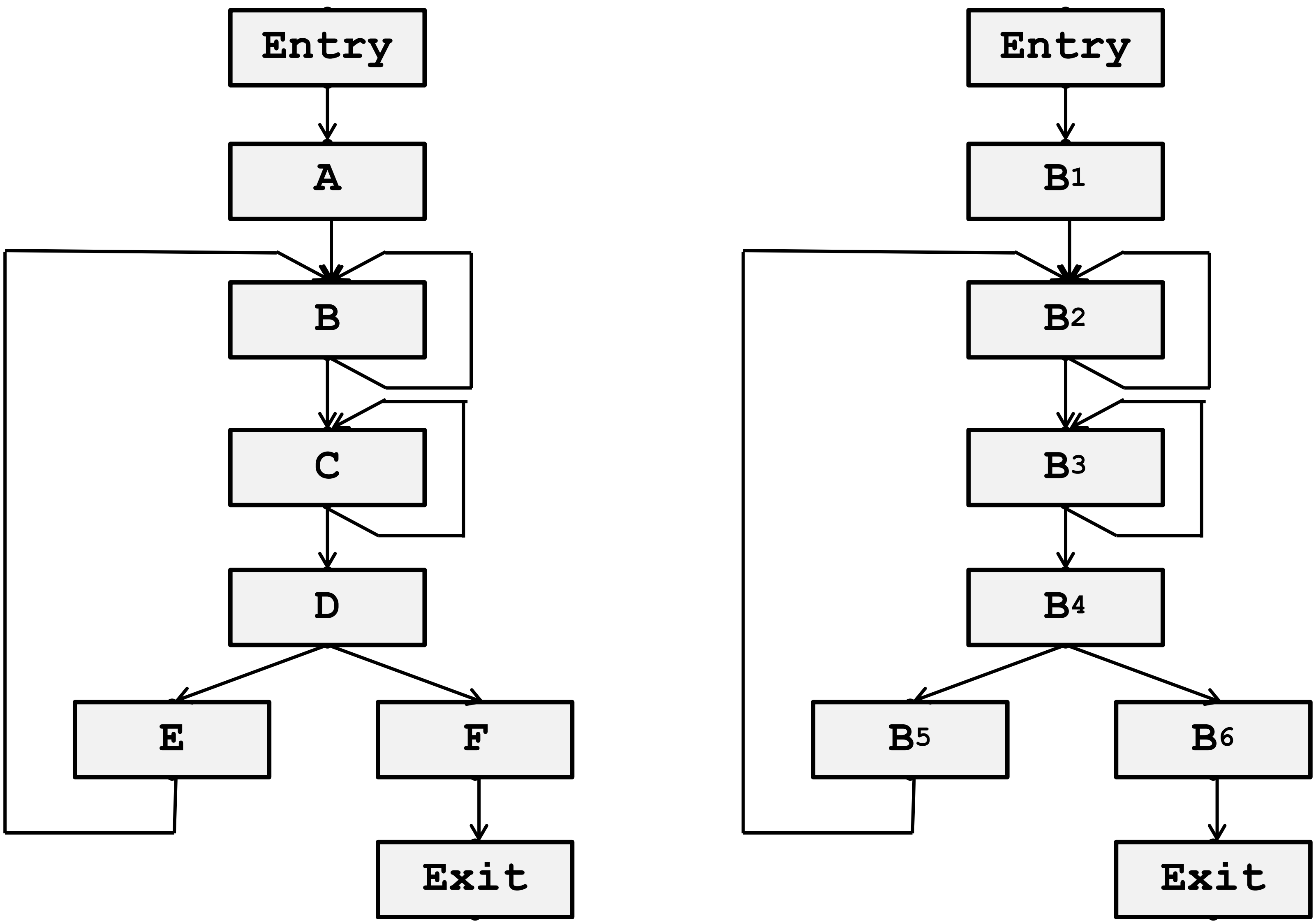


ГПУ

2.1 Нумерация вершин ГПУ

2.1.1 Глубинное остовное дерево

◊ После нумерации вершин ГПУ из примера 1.5.5 (тема 1) примет вид



2.1 Нумерация вершин ГПУ

2.1.2 Алгоритм построения глубинного остовного дерева и нумерации вершин ГПУ

Алгоритм

◊ **Вход**: ГПУ $G = \langle N, E\rangle$ с корнем $Entry \in N$

◊ **Выход**: глубинное остовное дерево графа G ($T_{DFS}(G)$) и нумерация узлов графа G, соответствующая упорядочению в глубину.

◊ **Метод**: все узлы $n \in N$ помечаются как nv ($not\ visited$)
вызывается рекурсивная процедура `DFST(n0)`
когда процедура `DFST` завершится, будут построены:

- массив узлов dfn в порядке новой нумерации
- множество T ребер глубинного остовного дерева $T_{DFS}(G)$

2.1 Нумерация вершин ГПУ

2.1.2 Алгоритм построения глубинного остовного дерева и нумерации вершин ГПУ

Рекурсивный алгоритм построения ***DFST***

◊ Функция **`main()`** :

```
main() {
   T = ∅;
   for all n ∈ N n.vst = nv;
   c = |N|; // |N| = кол-во узлов
   DFST(n0);
}
```

```
Каждая вершина ГПУ представлена структурой
      struct n {number, vst},
      где number – номер вершины, а
      vst имеет 2 значения:
      v (вершина была посещена) и
      nv (вершина не была посещена)
```

2.1 Нумерация вершин ГПУ

2.1.2 Алгоритм построения глубинного остовного дерева и нумерации вершин ГПУ

◊ Функция **DFST()**:

```
void DFST(n) {
   Отмечаем n как v;
   for all s ∈ Succ(n)
         if (s.vst == nv){
               T ∪=  {n→s};
               DFST(s);
         }
   // узлу n соответствует номер c
   n.number = c;
   dfn[c] = n;
   c--;
}
```

◊ **Замечание.** Для каждой вершины $n \in N$ нетрудно построить множество $Succ(n)$, содержащее все вершины $s \in N$, в которые входят дуги, выходящие из вершины n.

2.2 Анализ потока данных

2.2.1 Поток данных

◊ *Состояние программы* – множество значений всех переменных программы, включая переменные в кадрах стека времени выполнения, находящихся ниже текущей вершины стека

◊ *Точки программы* $(\ldots, p_j, p_{j+1}, p_{j+2}, \ldots)$ расположены между ее *инструкциями* $(\ldots, I_j, I_{j+1}, \ldots)$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \overset{p_j}{\bullet}\ I_j\ \overset{p_{j+1}}{\bullet}\ I_{j+1}\ \overset{p_{j+2}}{\bullet}\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

◊ Инструкция программы I_j описывается парой состояний:

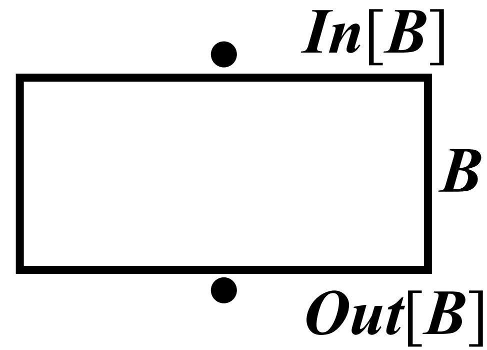
- состоянием в *точке программы* p_j *перед* инструкцией I_j
- состоянием в *точке программы* p_{j+1} *после* инструкции I_j.

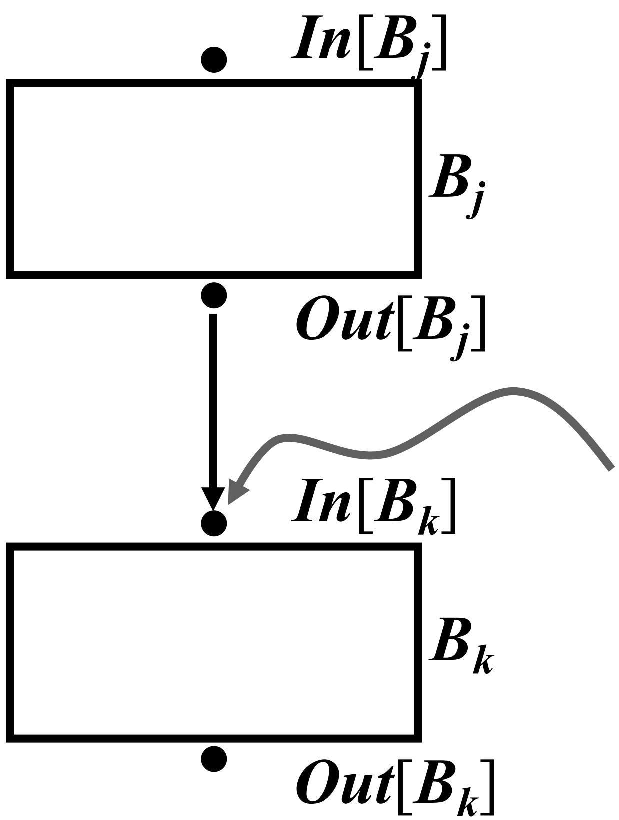
2.2 Анализ потока данных

2.2.1 Поток данных

Базовый блок B описывается парой состояний:

- состоянием $\boldsymbol{In}[B]$ в точке входа в B (перед первой инструкцией),
- состоянием $\boldsymbol{Out}[B]$ в точке выхода из B (после последней инструкции)





С дугой от блока B_j к блоку B_k связаны две точки программы:

- точка выхода из блока B_j (ей соответствует состояние $\boldsymbol{Out}[B_j]$)
- точка входа в блок B_k (ей соответствует состояние $\boldsymbol{In}[B_k]$)

При рассмотрении потока данных между базовыми блоками нельзя отождествлять точку выхода из базового блока и точку входа в следующий за ним базовый блок, так как последняя может следовать за точками выхода из нескольких базовых блоков (есть же **`goto`**)

2.2 Анализ потока данных

2.2.3 Передаточные функции инструкций

◊ Соотношение f_{I_j} между значениями данных до и после инструкции I_j называется *передаточной функцией* инструкции I_j.

◊ Передаточные функции работают **в прямом** и **обратном** направлениях:

- **В задаче прямого обхода:** $Out[I_j] = f_{I_j}(In[I_j])$
- **В задаче обратного обхода:** $In[I_j] = f^b_{I_j}(Out[I_j])$

◊ Если I_j и I_{j+1} – *последовательные* инструкции блока B, то

- **В задаче прямого обхода:** $In[I_{j+1}] = Out[I_j]$
- **В задаче обратного обхода:** $Out[I_{j-1}] = In[I_j]$

2.2 Анализ потока данных

2.2.3 Передаточные функции инструкций

- Соотношение f_{I_j} между значениями данных до и после инструкции I_j называется *передаточной функцией* инструкции I_j.
- Передаточные функции работают **в прямом** и **обратном** направлениях:
  - **В задаче прямого обхода:** $Out[I_j] = f_{I_j}(In[I_j])$
  - **В задаче обратного обхода:** $In[I_j] = f^b_{I_j}(Out[I_j])$
- Если I_j и I_{j+1} – *последовательные* инструкции блока B, то
  - **В задаче прямого обхода:** $In[I_{j+1}] = Out[I_j]$
  - **В задаче обратного обхода:** $Out[I_{j-1}] = In[I_j]$

f и f^b – две разные функции (для разных задач анализа потоков данных)

2.2 Анализ потока данных

2.2.3 Передаточные функции базовых блоков

◊ Рассмотрим базовый блок

$$B = \langle P, Input, Output \rangle,$$

где $P = I_1, \ldots, I_n$ (в указанном порядке)

◊ По определению

$$In[B] = In[I_1], Out[B] = Out[I_n].$$

◊ Передаточная функция f_B блока B по определению равна композиции передаточных функций его инструкций $I_1, \ldots, I_n$

$$f_B(x) = f_{I_n}(f_{I_{n-1}}(\ldots f_{I_1}(x)\ldots)) = (f_{I_1} \circ f_{I_2} \circ \ldots \circ f_{I_n})(x)$$

или

$$f_B = f_{I_n} \circ f_{I_{n-1}} \circ \ldots \circ f_{I_1}$$

2.2 Анализ потока данных

2.2.4 Передаточные функции базовых блоков

◊ **При прямом обходе**:

Соотношение между потоком данных при выходе из блока B и потоком данных при входе в него имеет вид

$$Out[B] = f_B(In[B])$$

◊ **При обратном обходе**:

Соотношение между потоком данных при входе в блок B и потоком данных при выходе из него имеет вид

$$In[B] = f_B^b(Out[B])$$

2.3 Достигающие определения

2.3.1 Терминология

◊ *Определением переменной* x называется инструкция, которая присваивает значение переменной x.

◊ *Использованием переменной* x является инструкция, одним из операндов которой является переменная x.

◊ Каждое определение переменной x *убивает* все другие ее определения.

◊ Определение d *достигает* точки p, если существует путь от точки, непосредственно следующей за d, к точке p, такой, что вдоль этого пути d остается живым.

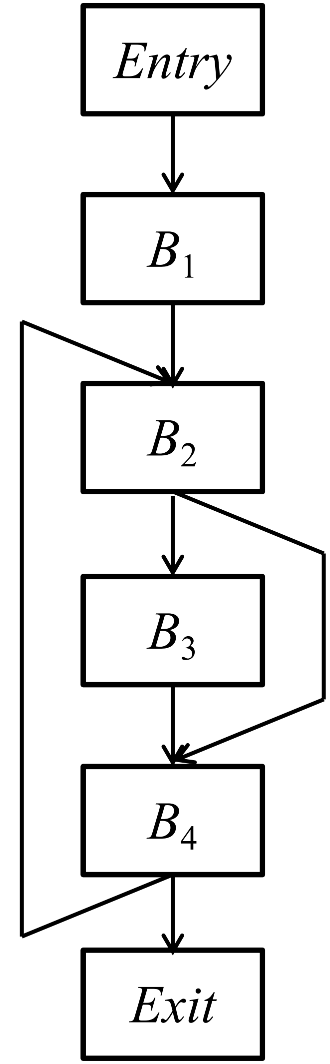
◊ **Замечание**. Во время анализа достигающих определений рассматриваются не переменные, а их определения, причем каждая переменная может иметь несколько определений

2.3 Достигающие определения

2.3.2 Пример

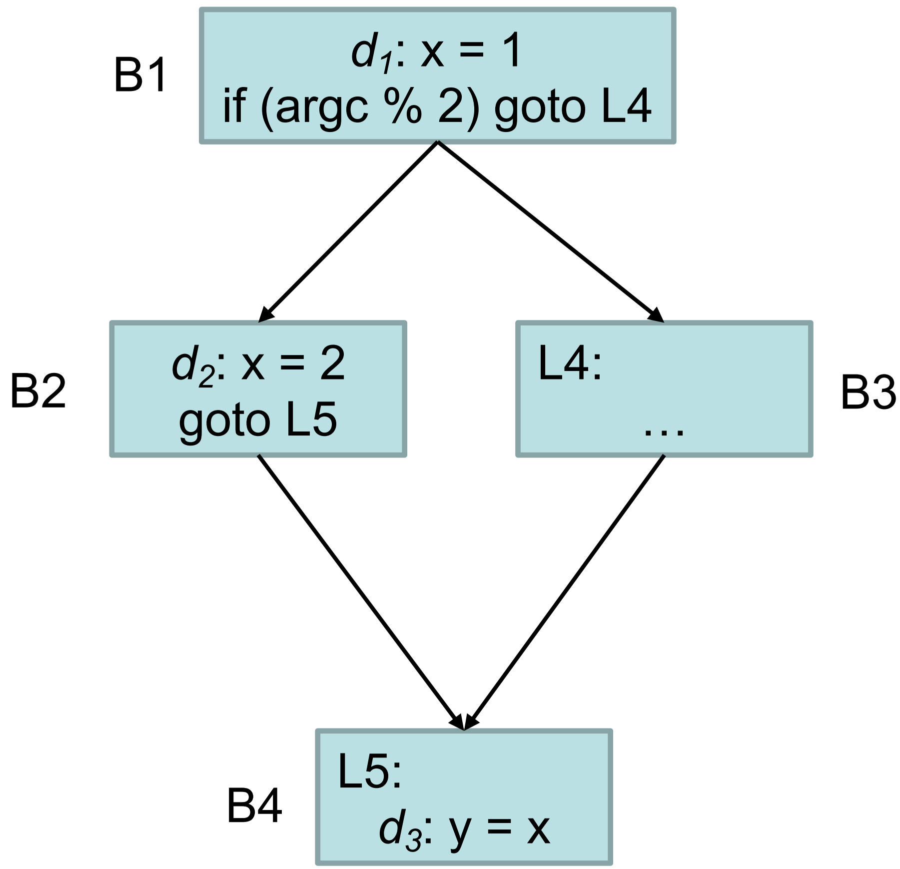
B_1
`i ← -, m, 1`
`j ← n`
`a ← u1`
	B_2
	`i ← +, i, 1`
	`j ← -, j, 1`

B_3 `a ← u2`	B_4 `i ← u3`



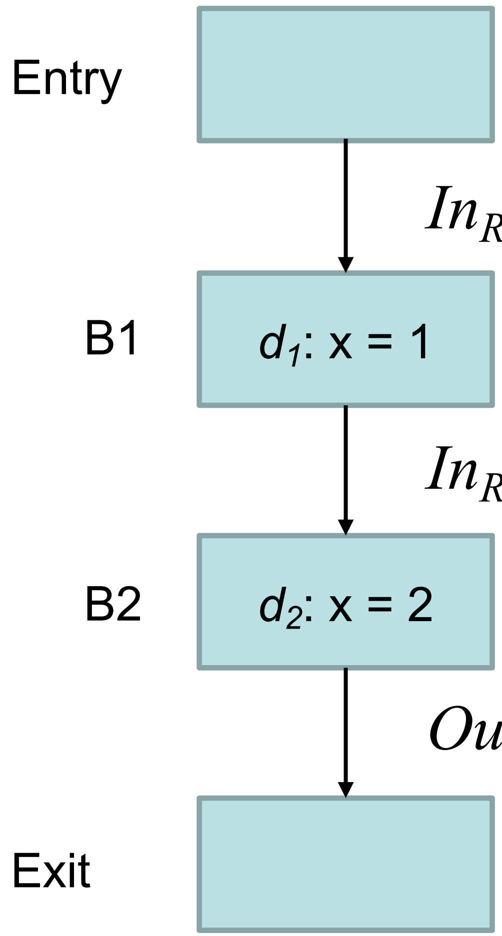
- ◊ Начало блока B_2 **достигается** определениями:
  - (i, B_1), (j, B_1), (a, B_1),
  - (j, B_2) (других определений j на пути от (j, B_2) до начала блока B_2 нет)
  - (a, B_3)
  - (i, B_4)
- ◊ Начало блока B_2 **не достигается** определением: (i, B_2), так как его убивает определение (i, B_4))
- ◊ Определение (j, B_1) **не достигает** блоков B_3 и B_4, так как его убивает определение (j, B_2)

2.3.2.1 Достигающие определения: примеры



Достигают ли определения d_1 и d_2 блока B4?

2.3.2.1 Достигающие определения: примеры



$In_{RD}\ (B1) = \varnothing$

$In_{RD}\ (B2) = Out_{RD}\ (B1) = \{\ d_1\ \}$

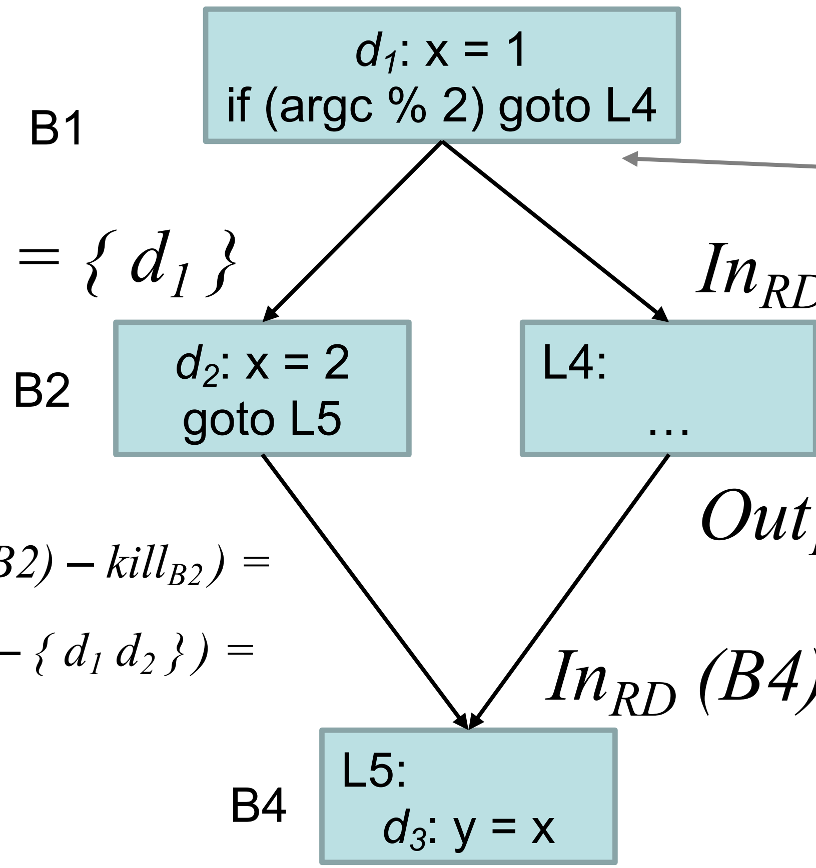
$kill_{B2} = \{\ d_1\ d_2\ \}$

$gen_{B2} = \{\ d_2\ \}$

$Out_{RD}\ (B2) = \{\ d_2\ \}$

Включим ли мы в *kill* определение d_2 (и вообще все, что также присутствует в *gen*), не повлияет на результат из-за вида передаточной функции *gen-kill*:
$Out_{RD}\ (B2) = gen_{B2} \cup (In_{RD}\ (B2) - kill_{B2})$

2.3.2.1 Достигающие определения: примеры



$Out_{RD}\,(B1) = \{\, d_1 \,\}$

$In_{RD}\,(B2) = \{\, d_1 \,\}$

$In_{RD}\,(B3) = \{\, d_1 \,\}$

$Out_{RD}\,(B3) = \{\, d_1 \,\}$

$In_{RD}\,(B4) = \{\, d_1\, d_2 \,\}$

$Out_{RD}\,(B2) =$

$= gen_{B2} \cup (In_{RD}\,(B2) - kill_{B2}) =$

$= \{\, d_2 \,\} \cup (\{\, d_1 \,\} - \{\, d_1\, d_2 \,\}) =$

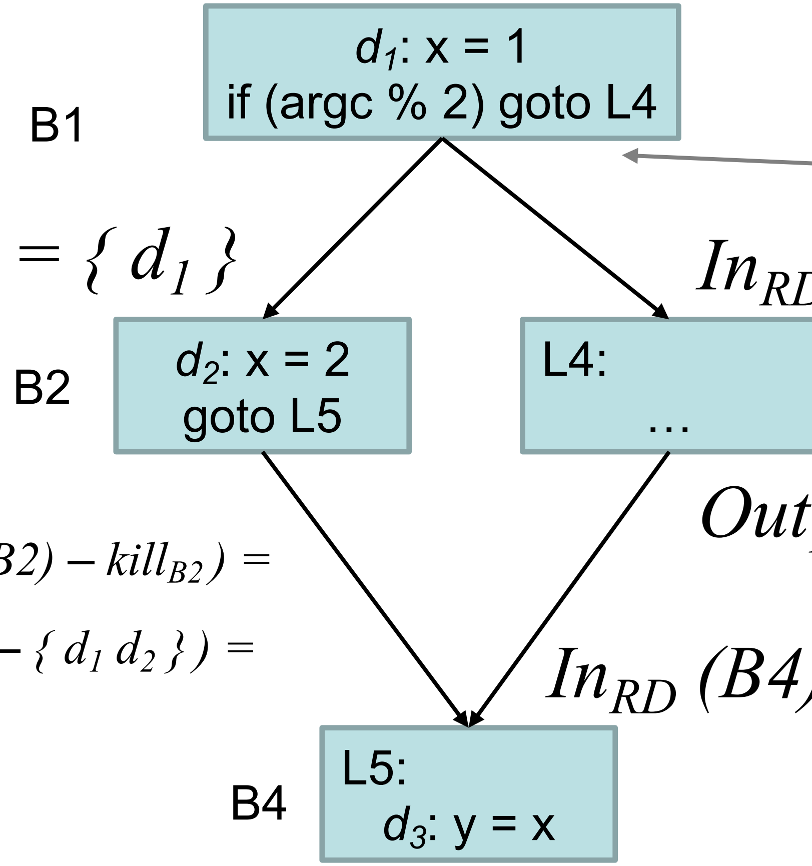
$= \{\, d_2 \,\}$

В общем виде:

$$Out_{RD}[B_i] = gen_{B_i} \cup (In_{RD}[B_i] - kill_{B_i})$$

$$In_{RD}[B_i] = \bigcup_{P \in Pred(B_i)} Out_{RD}[P]$$

2.3.2.1 Достигающие определения: примеры



$$Out_{RD}\ (B1) = \{\ d_1\ \}$$

$$In_{RD}\ (B2) = \{\ d_1\ \}$$

$$In_{RD}\ (B3) = \{\ d_1\ \}$$

$$Out_{RD}\ (B3) = \{\ d_1\ \}$$

$$In_{RD}\ (B4) = \{\ d_1\ d_2 \}$$

$Out_{RD}\ (B2) =$

$= gen_{B2} \cup (In_{RD}\ (B2) - kill_{B2}) =$

$= \{\ d_2\ \} \cup (\{\ d_1\ \} - \{\ d_1\ d_2\ \}) =$

$= \{\ d_2\ \}$

Консервативность решения: если учесть ”лишние” пути (и определения), это не приведет к некорректной оптимизации.
Например, если компилятор решает, можно ли распространить константу «2» в «d_3»

2.3.3 Передаточные функции для достигающих определений

- Рассмотрим инструкцию I

$$d\text{: } \mathtt{u\ =\ v\ +\ w}$$

расположенную между точками p_1 и p_2 программы.

- Пусть $\boldsymbol{x}$ – множество определений, достигающих точки p_1
  gen_I – множество определений, порождаемых инструкцией I
  $kill_I$ – множество определений, убиваемых инструкцией I
  y – множество определений, достигающих точки p_2
- $gen_I = \{d\}$
- для определения $kill_I$ нужно иметь **все другие определения `u`**, т.е. несколько базовых блоков, а иногда и всю процедуру.

2.3 Достигающие определения

2.3.3 Передаточные функции для достигающих определений

◊ Рассмотрим инструкцию I

d: **`u = v + w`**

расположенную между точками p_1 и p_2 программы.

- По определению передаточной функции

$$\boldsymbol{y} = f_I(\boldsymbol{x})$$

- Инструкция I сначала убивает все предыдущие определения **`u`** , а потом порождает d – новое определение **`u`**. Следовательно

$$\boldsymbol{y} = gen_I \cup (\boldsymbol{x} - kill_I)$$

- Следовательно, передаточная функция f_I инструкции I может быть записана в виде:

$$f_I(x) = gen_I \cup (x - kill_I)$$

2.3 Достигающие определения

2.3.4. Передаточные функции вида *gen-kill*

◊ **Определение**.

Передаточные функции, определяемые соотношением

$$f(x) = gen \cup (x - kill)$$

будем называть передаточными функциями вида *gen-kill*.

◊ **Утверждение 1**.

Композиция двух функций вида *gen-kill* является функцией вида *gen-kill*.

$$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) =$$
$$= gen_2 \cup \left(\left(gen_1 \cup (x - kill_1)\right) - kill_2\right) =$$
$$= gen_2 \cup (gen_1 - kill_2) \cup (x - kill_1 - kill_2)$$
$$(f_2 \circ f_1)(x) = gen_{f_2 \circ f_1} \cup \left(x - kill_{f_2 \circ f_1}\right)$$

где $gen_{f_2 \circ f_1} = gen_2 \cup (gen_1 - kill_2)$

$$kill_{f_2 \circ f_1} = kill_1 \cup kill_2$$

2.3 Достигающие определения

2.3.4. Передаточные функции вида *gen-kill*

◊ **Утверждение 2**.

Пусть базовый блок B содержит n инструкций, каждая из которых имеет передаточную функцию $f_i(x) = gen_i \cup (x - kill_i)$ $i = 1, 2, ..., n$. Тогда передаточная функция для базового блока B может быть записана как

$$f_B(x) = gen_B \cup (x - kill_B),$$

где

$$kill_B = kill_1 \cup kill_2 \cup ... \cup kill_n$$

$$gen_B = gen_n \cup (gen_{n-1} - kill_n) \cup (gen_{n-2} - kill_{n-1} - kill_n) \cup ...$$
$$\cup (gen_1 - kill_2 - kill_3 - ... - kill_n)$$

2.3 *Достигающие определения*

2.3.5. Передаточные функции вида *gen-kill*

◊ Если какая-либо переменная определяется в блоке B несколько раз, то в gen_B войдет только ее последнее определение,
т.е.
только последнее определение переменной будет действительно вне блока.

2.3 Достигающие определения

2.3.6. Система уравнений

◊ Таким образом, для каждого базового блока B_i можно выписать уравнение

$$Out[B_i] = f_B(In[B_i])$$

или в случае анализа достигающих определений

$$Out[B_i] = gen_B \cup (In[B_i] - kill_B)$$

◊ Если ГПУ содержит n базовых блоков,

получится n уравнений относительно $2 \cdot n$ неизвестных

$In[B_i]$ и $Out[B_i]$, $i = 1, 2, ..., n$.

◊ Еще n уравнений получится с помощью сбора вкладов путей.

2.3 Достигающие определения

2.3.6 Сбор вкладов путей

◊ Определение достигает точки программы, тогда и только тогда, когда существует по крайней мере один путь, вдоль которого эта точка может быть достигнута.

Этот путь должен пройти через какую-нибудь вершину из $Pred(B)$, причем если путь, проходящий через вершину $P \in Pred(B)$, не проходит ни через одну вершину, содержащую определение какой-либо переменной из B, то $Out(P)=\varnothing$. Следовательно

$$In[B] = \bigcup_{P \in Pred(B)} Out[P]$$

2.3 Достигающие определения

2.3.7 Итеративный алгоритм для вычисления достигающих определений

◊ Получается система уравнений

$$Out_{RD}[B_i] = gen_{B_i} \cup (In_{RD}[B_i] - kill_{B_i})$$
$$In_{RD}[B_i] = \bigcup_{P \in Pred(B_i)} Out_{RD}[P]$$

($i = 1, 2, \ldots, n$).

(RD - *Reaching definitions*)

◊ $In_{RD}[B]$ – множество переменных, определенных на входе в блок B

◊ $Out_{RD}[B]$ – множество переменных, определенных на выходе из блока B

В дальнейшем индекс RD будет опускаться

2.3.7 Итеративный алгоритм для вычисления достигающих определений

◊ Полученную систему уравнений

$$Out_{RD}[B_i] = gen_{B_i} \cup (In_{RD}[B_i] - kill_{B_i})$$

$$In_{RD}[B_i] = \bigcup_{P \in Pred(B_i)} Out_{RD}[P]$$

можно упростить, произведя очевидную подстановку, в результате чего система уравнений примет вид:

$$In_{RD}[B_i] = \bigcup_{P \in Pred(B_i)} \left(gen_P \cup (In_{RD}[P] - kill_P) \right)$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$.

или, если вспомнить, что было обещано опускать индекс RD,

$$In[B_i] = \bigcup_{P \in Pred(B_i)} \left(gen_P \cup (In[P] - kill_P) \right)$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$.

2.3.7 Итеративный алгоритм для вычисления достигающих определений

◊ Систему уравнений

$$In[B_i] = \bigcup_{P \in Pred(B_i)} \left(gen_P \cup (In[P] - kill_P) \right)$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$

будем решать методом итераций.

◊ При этом для одного или более блоков B_i множество $Pred(B_i)$ может содержать вершину $Entry$. В этих случаях будет использоваться «граничное условие» $In[Entry] = \varnothing$

◊ В качестве начальных итераций $In[B_i]$ возьмем пустые множества: $\left(In[B_i] \right)^0 = \varnothing$

2.3 Достигающие определения

2.3.7 Итеративный алгоритм для вычисления достигающих определений

◊ ***Алгоритм «Достигающие определения»***

- **Вход**: ГПУ (N, E), в котором для каждого базового блока $B_i \in N$ вычислены множества $kill_{B_i}$ и gen_{B_i}
- **Выход**: множества $In[B_i], (i=1,2,...,n)$ достигающих определений на входе в каждый базовый блок B_i графа потока управления
- **Метод**: Используется метод итераций с начальной итерацией $\left(In[B_i]\right)^0 = \varnothing$.

  На всех итерациях r: $\left(In[Entry]\right)^r = \varnothing$ (граничное условие)

  Итерации продолжаются до тех пор, пока все множества $\left(In[B_i]\right)^r$ (r – номер итерации) не перестанут изменяться.

◊ **Замечание**. Некоторые из множеств $\left(In[B_i]\right)^r$ могут перестать изменяться гораздо раньше последней итерации.

2.3 Достигающие определения

2.3.7 Итеративный алгоритм для вычисления достигающих определений

```
In[Entry] = ∅;
change = true;
for (каждый базовый блок B, отличный от Entry)
   In[B] = ∅;

/* основной цикл*/
while (change) do {
         change = false;
         for (каждый базовый блок B, отличный от Entry) {
            /* вычисление новых значений In[B] и переменной
               change */
```

$$InNew[B] = \bigcup_{P \in Pred(B)} \left(gen_P \cup (In[P] - kill_P) \right)$$

```
            if (InNew[B] ≠ In[B]){
               In[B] = InNew[B];
               change = true;
            }
         }
}
```

Алгоритм 2.3.7 не учитывает **замечания**: для некоторых значений i окончательный результат может быть получен намного раньше, чем будет выполнена последняя итерация. А это означает, что если на самом деле так получится, соответствующие значения будут много раз напрасно вычисляться, сравниваться с предыдущей итерацией и отвергаться – много лишней работы.

Получится, что алгоритм оптимизации сам не оптимален

```
while (change) do {
        change = false;
        for (каждый базовый блок B, отличный от Entry) {
            /* вычисление новых значений In[B] и переменной
               change */
```

$$InNew[B] = \bigcup_{P \in Pred(B)} \left(gen_P \cup \left(In[P] - kill_P \right) \right)$$

```
            if (InNew[B] ≠ In[B]){
                In[B] = InNew[B];
                change = true;
```

Поэтому имеет смысл модифицировать алгоритм 2.3.7, введя понятие рабочего множества. Рабочее множество **WorkList**; представляет собой очередь, в которую помещаются только те базовые блоки, которые требуют дальнейшей обработки.

2.3.8 Модифицированный итеративный алгоритм для вычисления достигающих определений

```
In[Entry] = ∅;
WorkList = ∅;
    for (каждый базовый блок B,отличный от Entry){
      поместить B в WorkList;
      In[B] = ∅;/* Каждому In[B] присваивается значение его
                   нулевой итерации */
    };
    do {                              /* основной цикл*/
        Выбрать из очереди WorkList очередной блок B
        Вычислить InNew[B], используя уравнение
```

$$InNew[B] = \bigcup_{P \in Pred(B)} \left(gen_P \cup (In[P] - kill_P) \right)$$

```
        /*При вычислении InNew[B] множества In[P],
              где P ∈ Pred(B), могут иметь значения либо
              текущей, либо следующей итерации
         if (InNew[B] ≠ In[B]) {
              In[B] = InNew[B];
              Поместить Succs(B) в конец очереди WorkList
         }
    } while |WorkList|>0;
```

2.3.8 Модифицированный итеративный алгоритм для вычисления достигающих определений

```
In[Entry] = ∅;
WorkList = ∅;
     for (каждый базовый блок B,отличный от Entry){
       поместить B в WorkList;
       In[B] = ∅;/* Каждому In[B] присваивается значение его
                    нулевой итерации */
```

Ценность алгоритма в том, что каждый базовый блок рассматривается не на каждой итерации, а столько раз, сколько он попадает в WorkList

$$InNew[B] = \bigcup_{P \in Pred(B)} \left(gen_P \cup \left(In[P] - kill_P \right) \right)$$

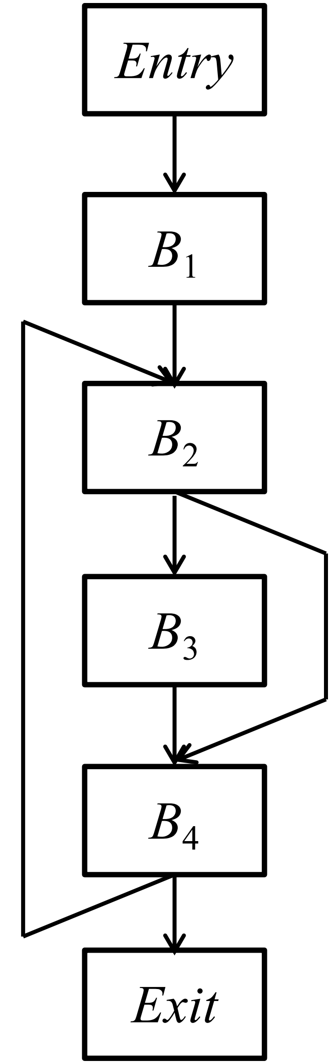
```
         /*При вычислении InNew[B] множества In[P],
               где P ∈ Pred(B), могут иметь значения либо
               текущей, либо следующей итерации
          if (InNew[B] ≠ In[B]) {
               In[B] = InNew[B];
               Поместить Succs(B) в конец очереди WorkList
           }
     } while |WorkList|>0;
```

2.3 Достигающие определения

2.3.8 Пример

B_1
`i ← –, m, 1`
`j ← n`
`a ← u1`
	B_2
	`i ← +, i, 1`
	`j ← –, j, 1`

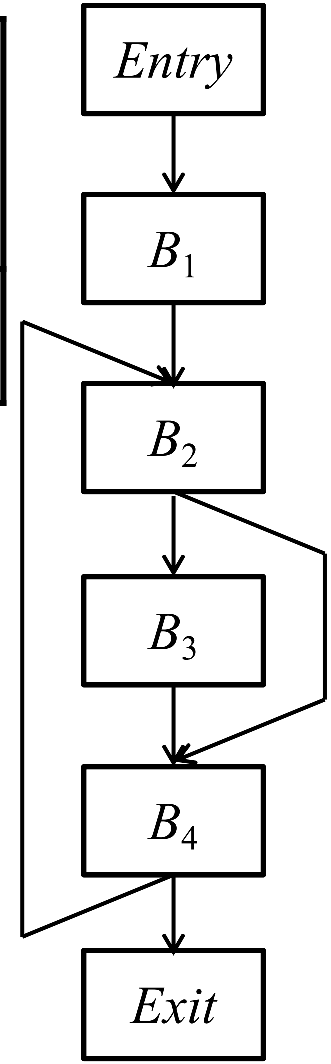
B_3 `a ← u2`	B_4 `i ← u3`



2.3.8 Пример

В простой программе справа 7 определений. Требуется определить, какие определения достигают входов в ее 5 базовых блоков **B1,B2, B3,B4 и Exit**

B_1 d_1 : `i ← -, m, 1` d_2 : `j ← n` d_3 : `a ← u1`	B_2 d_4 : `i ← +, i, 1` d_5 : `j ← -, j, 1`
B_3 d_6 : `a ← u2`	B_4 d_7 : `i ← u3`



$d_1 = (i, B_1)$ – определение переменной i в блоке B_1

$d_4 = (i, B_2)$ – определение переменной i в блоке B_2

$d_7 = (i, B_4)$ – определение переменной i в блоке B_4

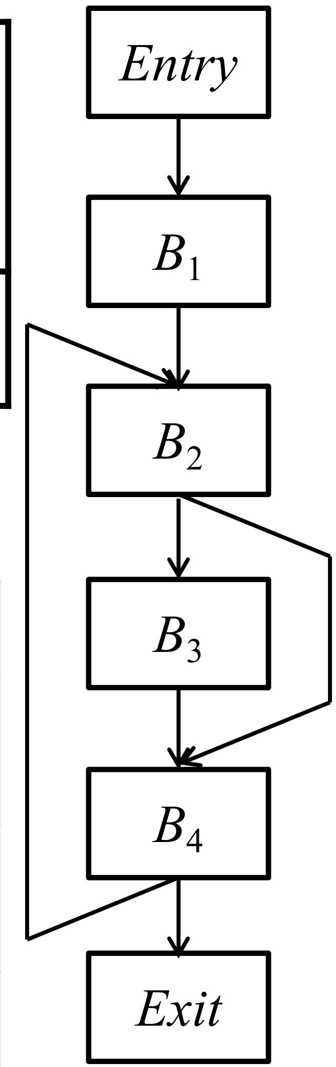
Вычислим множества gen и $kill$ для каждого базового блока

Для блока B_1 $\quad gen_{B_1} = \{d_1, d_2, d_3\} \quad kill_{B_1} = \{d_4, d_5, d_6, d_7\}$

2.3 *Достигающие определения*

2.3.8 Пример

B_1 d_1 : `i ← -, m, 1` d_2 : `j ← n` d_3 : `a ← u1`	B_2 d_4 : `i ← +, i, 1` d_5 : `j ← -, j, 1`
B_3 d_6 : `a ← u2`	B_4 d_7 : `i ← u3`



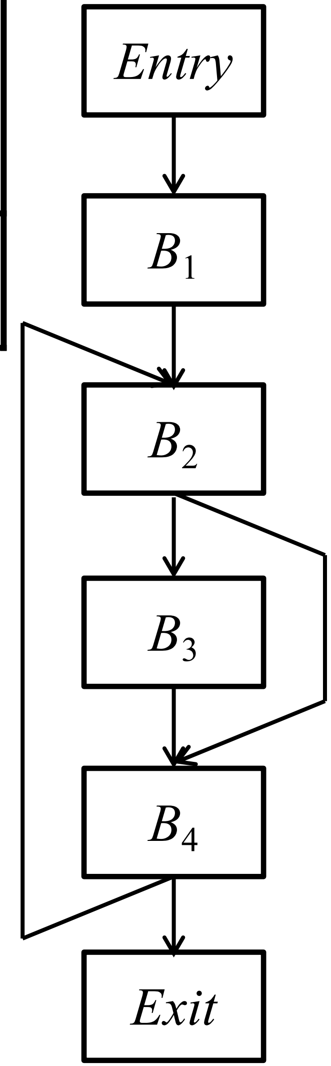
Результаты вычисления множеств *gen* и *kill* для базовых блоков сведены в таблицу

B	gen_B	$kill_B$
B_1	$\{(i,B_1), (j,B_1), (a,B_1)\}$ = **(1110000)**	$\{(i,B_2), (j,B_2), (a,B_3), (i,B_4)\}$ = **(0001111)**
B_2	$\{(i,B_2), (j,B_2)\}$ = **(0001100)**	$\{(i,B_1), (j,B_1), (i,B_4)\}$ = **(1100001)**
B_3	$\{(a,B_3)\}$ = **(0000010)**	$\{(a,B_1)\}$ = **(0010000)**
B_4	$\{(i,B_4)\}$ = **(0000001)**	$\{(i,B_1), (i,B_2)\}$ = **(1001000)**
Exit	$\varnothing$	$\varnothing$

2.3 Достигающие определения

2.3.8 Пример

B_1 d_1 : `i ← -, m, 1` d_2 : `j ← n` d_3 : `a ← u1`	B_2 d_4 : `i ← +, i, 1` d_5 : `j ← -, j, 1`
B_3 d_6 : `a ← u2`	B_4 d_7 : `i ← u3`



Множества удобно представлять битовыми векторами, длина которых равна мощности базового множества. В рассматриваемом примере длина векторов равна 7.

$$gen_{B_1} = \mathtt{(1110000)} \qquad kill_{B_1} = \mathtt{(0001111)}$$

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
(i, B_1)	(j, B_1)	(a, B_1)	(i, B_2)	(j, B_2)	(a, B_3)	(i, B_4)

Определения примера 2.3.8

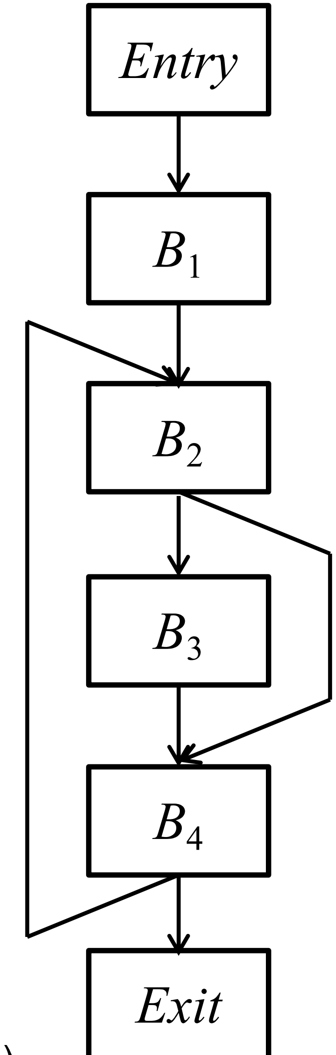
B	gen_B	$kill_B$
B_1	(1110000)	(0001111)
B_2	(0001100)	(1100001)
B_3	(0000010)	(0010000)
B_4	(0000001)	(1001000)

Множества ***gen*** и ***kill*** базовых блоков примера 2.3.8

2.3 Достигающие определения

2.3.8 Пример

B	$Pred(B)$
B_1	$Entry$
B_2	$\{B_1, B_4\}$
B_3	B_2
B_4	$\{B_2, B_3\}$
$Exit$	B_4



Нулевая итерация:

$(In[B_i])^0 = \varnothing = (0000000)$, i = 1,2,3,4.

$(In[Exit])^0 = \varnothing = (0000000)$

Первая итерация:

Вычисляем $(In[B_i])^1$ (i = 1,2,3,4) и $(In[Exit])^1$ по формуле

$$InNew[B] = \bigcup_{P \in Pred(B)} \left(gen_P \cup (In[P] - kill_P)\right)$$

используя значения $(In[B_i])$, известные к моменту вычисления

Вычисление $(In[B_1])^1$. $(In[B_1])^1 = \varnothing$

$(In[B_1])$ не попадает в WorkList и больше не будет вычисляться

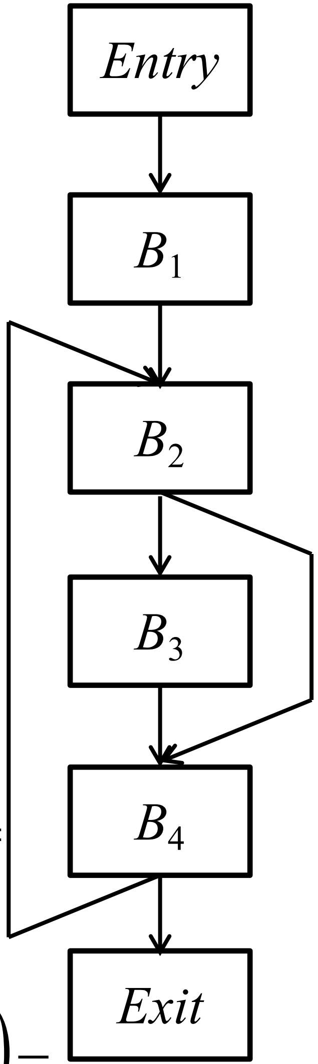
Вычисление $(In[B_2])^1$.

$$(In[B_2])^1 = \left(gen_{B_1} \cup \left((In[B_1])^1 - kill_{B_1}\right)\right) \cup \left(gen_{B_4} \cup \left((In[B_4])^0 - kill_{B_4}\right)\right) =$$
$$= \left((1110000) \cup (\varnothing - (0001111))\right) \cup \left((0000001) \cup (\varnothing - (1001000))\right) =$$
$$= (1110000) \cup (0000001) = (1110001)$$

2.3 Достигающие определения

2.3.8 Пример

B	gen_B	$kill_B$	$Pred(B)$
B_1	(1110000)	(0001111)	$Entry$
B_2	(0001100)	(1100001)	$\{B_1, B_4\}$
B_3	(0000010)	(0010000)	B_2
B_4	(0000001)	(1001000)	$\{B_2, B_3\}$



Первая итерация:

Вычисление $(In[B_3])^1$.

$$(In[B_3])^1 = gen_{B_2} \cup ((In[B_2])^1 - kill_{B_2}) =$$
$$= (0001100) \cup ((1110001) - (1100001)) =$$
$$= (0011100)$$

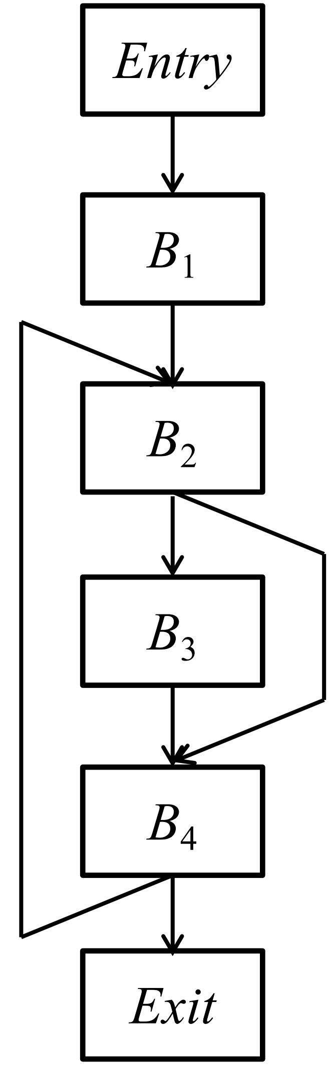
Вычисление $(In[B_4])^1$.

$$(In[B_4])^1 = \left(gen_{B_2} \cup ((In[B_2])^1 - kill_{B_2})\right) \cup \left(gen_{B_3} \cup ((In[B_3])^1 - kill_{B_3})\right) =$$
$$= ((0001100) \cup ((1110001) - (1100001))) \cup$$
$$\cup ((0000010) \cup ((0011100) - (0010000))) =$$
$$= (0011110)$$

2.3 Достигающие определения

2.3.8 Пример

B	gen_B	$kill_B$	$Pred(B)$
B_1	(1110000)	(0001111)	$Entry$
B_2	(0001100)	(1100001)	$\{B_1, B_4\}$
B_3	(0000010)	(0010000)	B_2
B_4	(0000001)	(1001000)	$\{B_2, B_3\}$



Первая итерация:

Вычисление $(In[Exit])^1$.

$$\left(In[Exit]\right)^1 = gen_{B_4} \cup \left(\left(In[B_4]\right)^1 - kill_{B_4}\right) =$$

=(0000001)∪((0011110)−(1001000))=

=(0010111)

2.3 Достигающие определения

2.3.8 Пример

B	$(In[B])^1$	$(In[B])^2$	$(In[B])^3$
B_1	0000000	0000000	0000000
B_2	1110001	1110111	1110111
B_3	0011100	0011110	0011110
B_4	0011110	0011110	0011110
$Exit$	0010111	0010111	0010111

Вторая и третья итерации выполняются аналогично (их результаты внесены в таблицу). На этом процесс завершается, так как, как видно из таблицы, все $(In[B])^3$ совпадают с $(In[B])^2$, т.е. $WorkList$ пуст.

2.3.9 Множества $Input$ для базовых блоков

◊ Множество $Input[B]$ для базового блока B – это множество $In_{RD}[B]$, которое строится при исследовании достигающих определений

2.4 Живые переменные

2.4.1 Множества $Output$ для базовых блоков

◊ Множества $Output$ для базовых блоков строятся как результат анализа, позволяющего выявить *живые переменные*, т.е. переменные, используемые в базовых блоках, в которые управление попадает после выхода из исследуемого базового блока.

◊ Анализ похож на предыдущий, но ГПУ просматривается не с начала, а с конца: от $Exit$ к $Entry$.

2.4.2. Определение

◊ Цель анализа – для определения переменной x в точке p программы выяснить, будет ли указанное значение x использоваться вдоль какого-нибудь пути, начинающегося в точке p.

- Если да – переменная x *жива* (активна) в точке p,
- если нет – переменная x *мертва* (неактивна) в точке p.

2.4 Живые переменные

2.4.3 Уравнения потока данных

◊ $In_{LV}[B]$ – множество переменных, **живых** на входе в блок B

LV – Live Variables

$Out_{LV}[B]$ – множество переменных, **живых** на выходе из блока B.

◊ В чем проблема?

Пусть в блоке B используется переменная v.

Возможны 2 случая:

1) используется определение v в одном из блоков $B' \in Pred^*(B);$

2) используется определение v в самом блоке B.

В первом случае говорят, что v жива на выходе из B'

Во втором случае говорят, что v мертва на выходе из B'

2.4 Живые переменные

2.4.3 Уравнения потока данных

◊ $In_{LV}[B]$ – множество переменных, **живых** на входе в блок B

LV – *Live Variables*

$Out_{LV}[B]$ – множество переменных, **живых** на выходе из блока B .

◊ def_B – множество переменных, определяемых в блоке B до их использования в этом блоке

(любая переменная из def_B **мертва** на входе в блок B и, следовательно на выходе каждого блока $B' \in Pred_B$)

◊ use_B – множество переменных, используемых в блоке B до их определения в этом блоке

(любая переменная из use_B **жива** на входе в блок B и, следовательно на выходе каждого блока $B' \in Pred_B$)

◊ **Замечание**. В анализе живых переменных рассматриваются не определения переменных, а сами переменные.

2.4 Живые переменные

2.4.3 Уравнения потока данных

◊ $In_{LV}[B]$ – множество переменных, **живых** на входе в блок B

LV – *Live Variables*

$Out_{LV}[B]$ – множество переменных, **живых** на выходе из блока B .

◊ def_B – множество переменных, определяемых в блоке B до их использования в этом блоке

(любая переменная из def_B **мертва** на входе в блок B и, следовательно на выходе каждого блока $B' \in Pred_B$)

В качестве def_B можно рассматривать множество *всех* переменных, определяемых в блоке (а не только определяемых до использования) – на результат вычисления $Out_{LV}[B]$ это не повлияет, т.к. они также входят в use_B и в передаточной функции будут добавлены независимо от того, есть ли они в def_B:

$$In[B] = use_B \cup (Out[B] - def_B)$$

$$Out[B] = \bigcup_{S \in Succ(B)} In[S]$$

2.4 Живые переменные

2.4.3 Уравнения потока данных

Рассмотрим блок B

```
m ← 1
k ← m + k
a ← a + b + m
```

Речь идет о выходе из блоков из $Pred(B)$

Для этих блоков $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{def}$

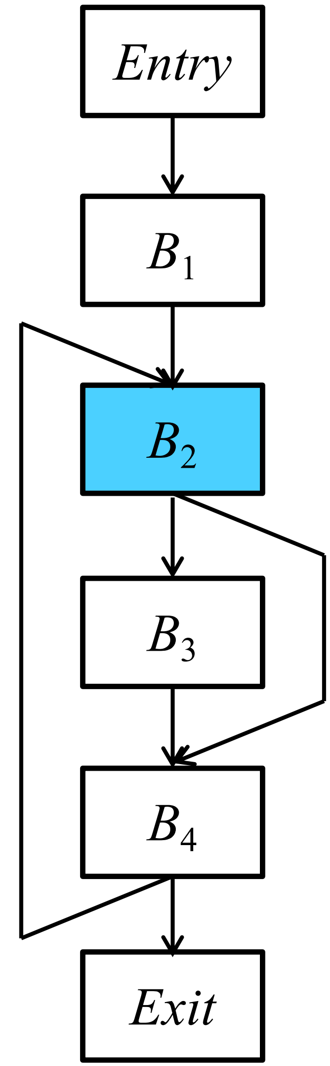
Остальные переменные $\in \boldsymbol{use}$

Если переменная встречается и в правой, и в левой части присваивания, то для определений def и use можно считать, что правая часть выполняется раньше левой.

2.4.3 Уравнения потока данных

B_1
`i ← -, m, 1`
`j ← n`
`a ← u1`
	B_2
	`i ← +, i, 1`
	`j ← -, j, 1`

B_3 `a ← u2`	B_4 `i ← u3`



◊ **Пример**

(1) в блоке B_2 переменные i и j используются до их переопределения, следовательно,

$$use_{B_2} = \{i, j\} = (\mathbf{11000000})$$

(2) в блоке B_2 определяются новые значения переменных i и j, так что

$$def_{B_2} = \{i, j\} = (\mathbf{11000000})$$

В программе 8 переменных: $i, j, a, m, n, u1, u2, u3$

2.4 Живые переменные

2.4.3 Уравнения потока данных

◊ Уравнения, связывающие def и use с неизвестными In и Out, определяются следующим образом:

$$In[B] = use_B \cup (Out[B] - def_B)$$

$$Out[B] = \bigcup_{S \in Succ(B)} In[S]$$

◊ К ним добавляется граничное условие

$$Out\ [Exit] = \varnothing$$

2.4 Живые переменные

2.4.3 Уравнения потока данных

◊ Уравнения, связывающие def и use с неизвестными In и Out, определяются следующим образом:

$$In[B] = use_B \cup (Out[B] - def_B)$$

$$Out[B] = \bigcup_{S \in Succ(B)} In[S]$$

def_B – множество переменных, определяемых в блоке B до их использования* в этом блоке (**Исключаем заведомо мертвые переменные**).
use_B – множество переменных, используемых в блоке B до их определения** в этом блоке (**Добавляем новые живые переменные**)

(*) Также можно рассматривать в качестве def_B просто множество всех переменных, определяемых в блоке B – на результат это не повлияет.
(**) В случае use_B важно, что переменные используются до определения в блоке.

Хотя по своему смыслу определения действительно должны быть симметричны, допустимость (*) объясняется только видом передаточной функции.

2.4 Живые переменные

2.4.3 Уравнения потока данных

◊ Если значение In, определяемое первым уравнением подставить во второе уравнение, множества In будут исключены из системы уравнений и получится система уравнений, содержащая в качестве неизвестных только множества Out:

$$Out[B] = \bigcup_{S \in Succ(B)} \left(use_S \cup (Out[S] - def_S) \right)$$

◊ К ним добавляется граничное условие

$$Out\,[Exit] = \varnothing$$

2.4 Живые переменные

2.4.4 Итеративный алгоритм анализа живых переменных

◊ ***Алгоритм «Живые переменные»***

- **Вход**: ГПУ, в котором для каждого блока B вычислены множества def и use
- **Выход**: множества переменных, живых на выходе ($Out[B]$) каждого базового блока B.
- **Метод**: выполнить следующую программу:

2.4 *Живые переменные*

2.4.4 Итеративный алгоритм анализа живых переменных

◊ ***Алгоритм «Живые переменные»***

- **Метод**: выполнить следующую программу:

```
Out[Exit] = ∅;
WorkList = ∅;
for(каждый базовый блок B,отличный от Exit){
    Out[B] = ∅;
    WorkList ∪= {B}
}
/*основной цикл*/
do { Извлечь блок B из WorkList (исключив B);
```

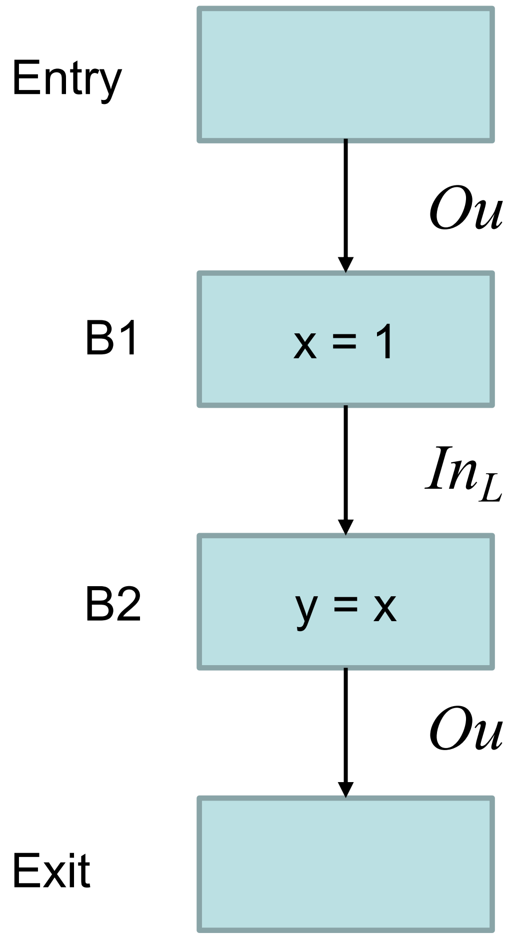
$$\mathrm{OutNew[B]} = \bigcup_{S \in \mathrm{Succ(B)}} \left(\mathrm{use}_S \cup (\mathrm{Out[S]} - \mathrm{def}_S)\right)$$

```
     if (OutNew[B] ≠ Out[B]) {
         Out[B] = OutNew[B] ;
         WorkList ∪= Pred(B)
     }
} while |WorkList|>0;
```

2.4.5 Множества $\boldsymbol{Output}$ для базовых блоков

◊ Множество $Output[B]$ для базового блока B – это множество $Out_{LV}[B]$, которое строится при исследовании живых переменных

2.4.6 Примеры: живые переменные

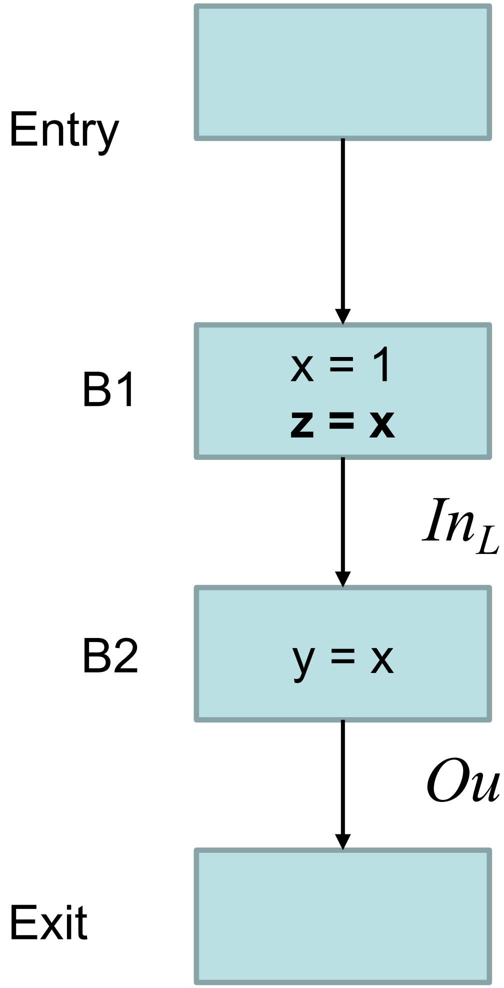


$$Out_{LV}\,(Entry) = \varnothing$$

$$In_{LV}\,(B2) = Out_{LV}\,(B1) = \{\ x\ \}$$

$$Out_{LV}\,(B2) = \varnothing$$

2.4.6 Примеры: живые переменные



$$Out_{LV}\,(Entry) =$$
$$In_{LV}\,(B1) = use_{B1} \cup (Out_{LV}\,(B1) - def_{B1}) =$$
$$= gen_{B1} \cup (Out_{LV}\,(B1) - kill_{B1}) = \varnothing$$

$$def\,(B1) = kill_{B1} = \{\, x\ z \,\}$$
$$use\,(B1) = gen_{B1} = \varnothing$$

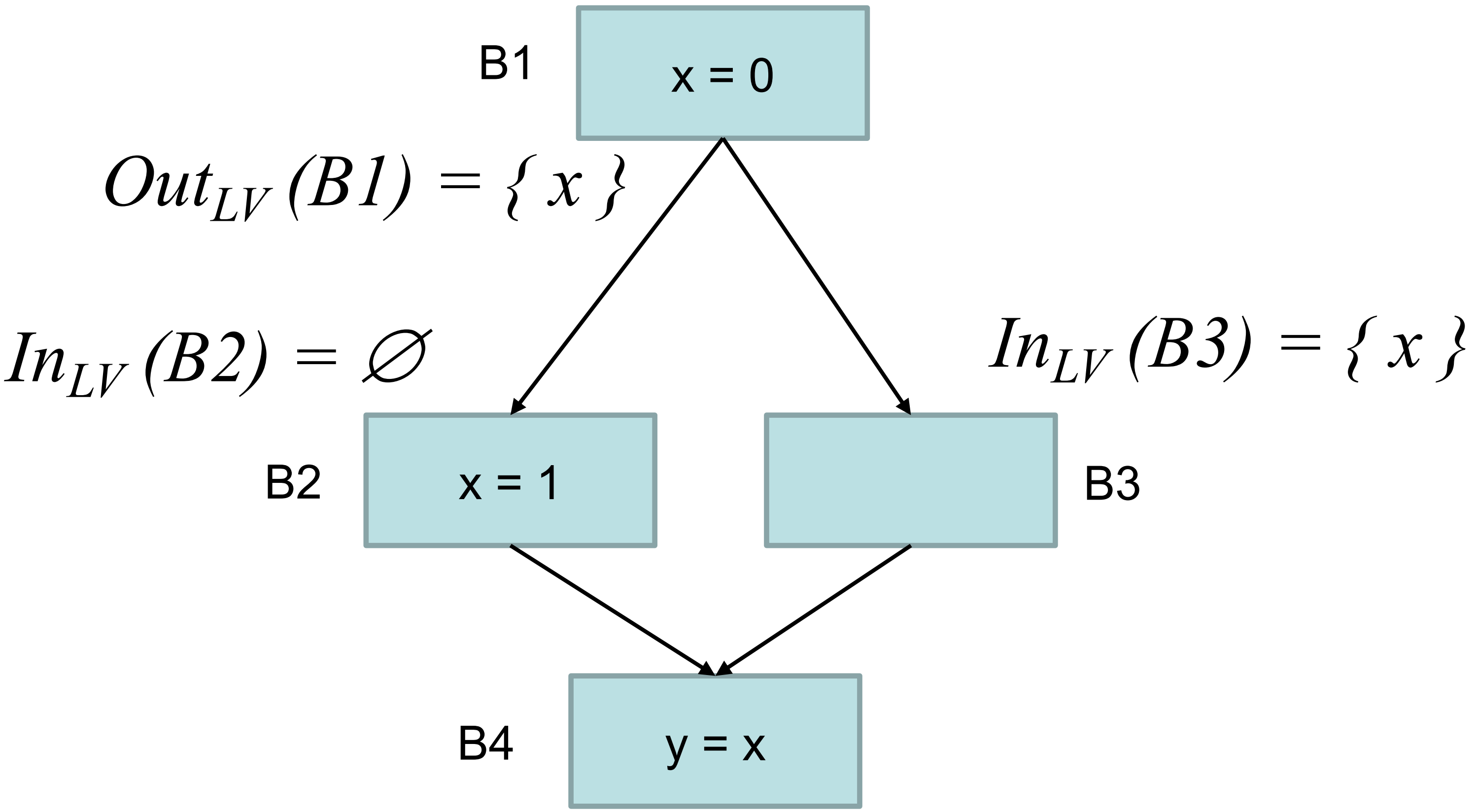
$$In_{LV}\,(B2) = Out_{LV}\,(B1) = \{\, x \,\}$$

$$use\,(B2) = gen_{B2} = \{\, x \,\}$$

$$Out_{LV}\,(B2) = \varnothing$$

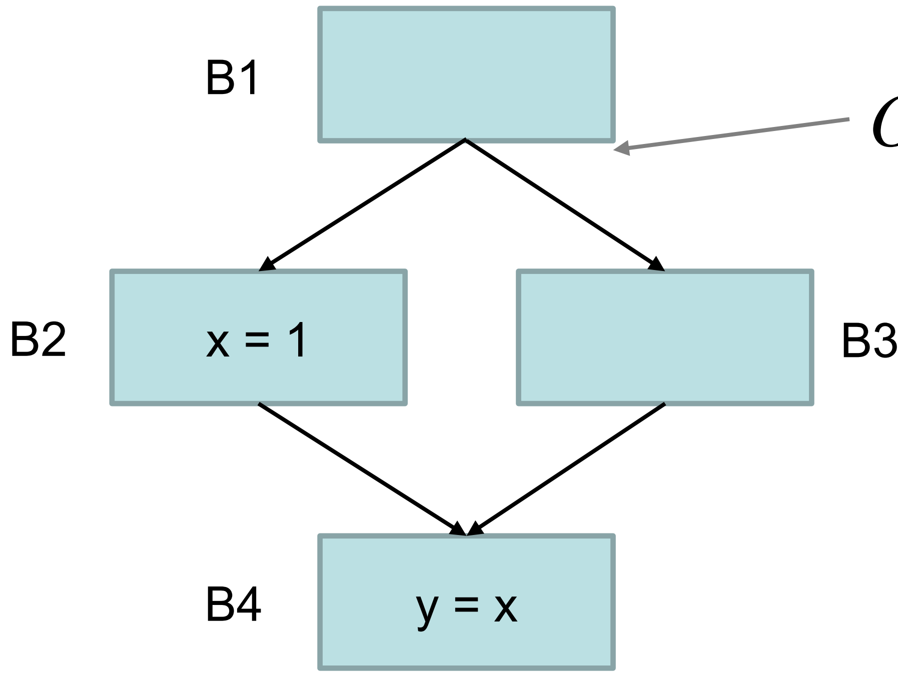
Множества *def* и *kill*, а также *use* и *gen* для данной задачи являются синонимами. В общем виде для данного класса задач (*Gen-Kill*) анализа потоков данных используется *gen/kill*, в частном случае для живых переменных – *use/def*.

2.4.6 Примеры: живые переменные



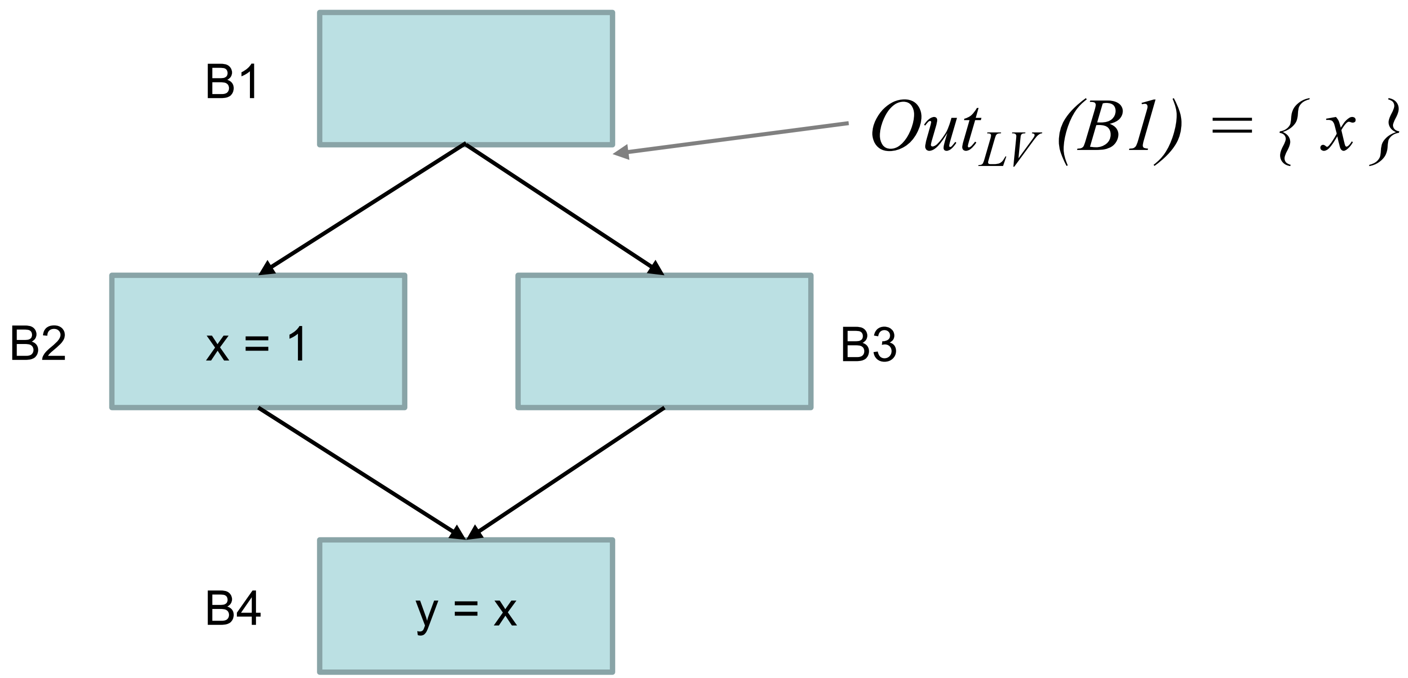
Консервативность решения: если учесть ”лишние” пути (и определения), это не приведет к некорректной оптимизации.
Например, если компилятор решает, можно ли в B3 занять регистр, в котором лежит «x», под другую переменную.

2.4.6 Примеры: живые переменные



$Out_{LV}(B1) = ?$

2.4.6 Примеры: живые переменные



Строго говоря, живая переменная может вообще не иметь определения в рассматриваемом ГПУ.